

ЯНВАРЬ/ФЕВРАЛЬ

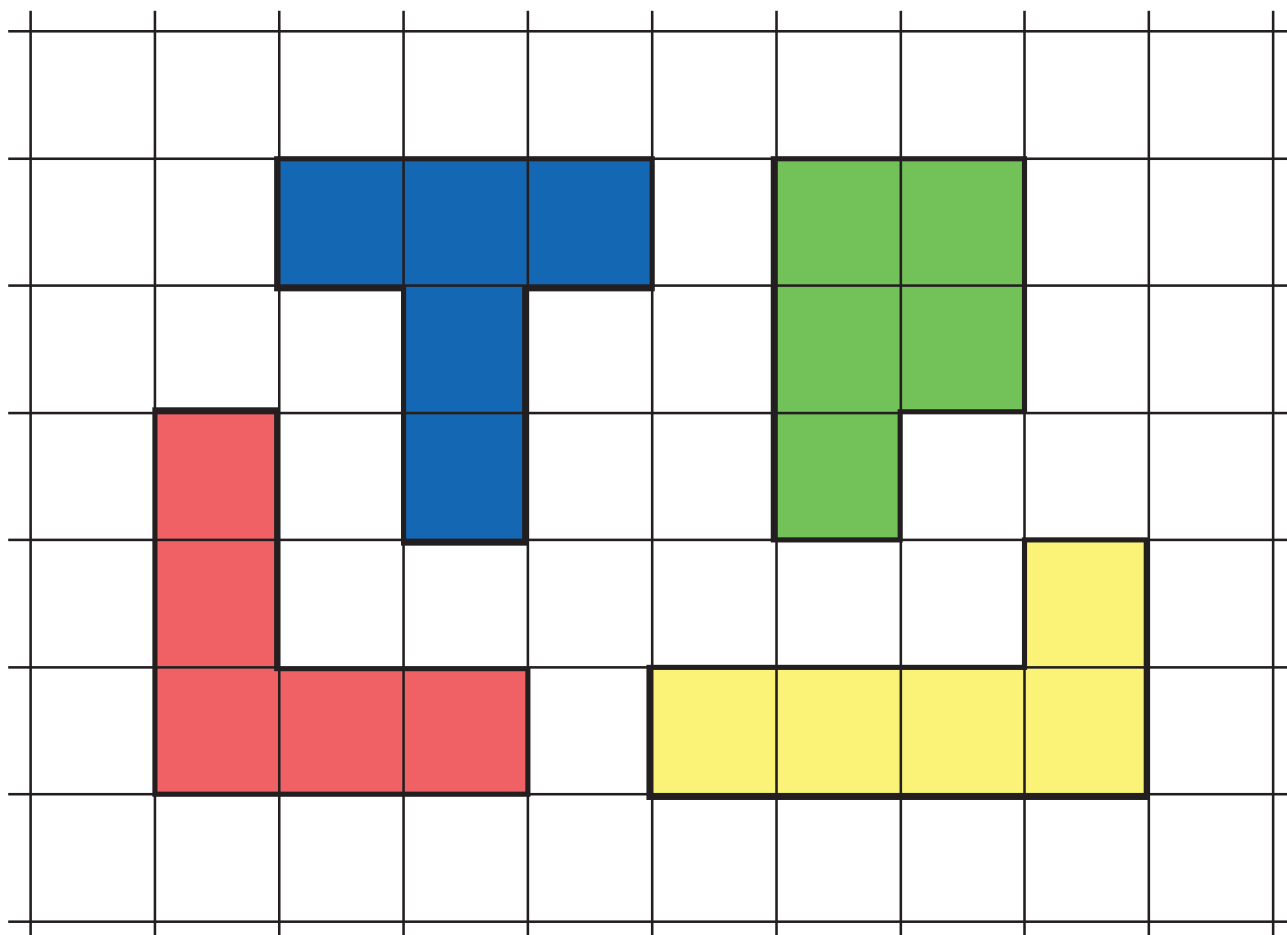
ISSN 0130-2221

2014 • №1

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ





НЕОБЫЧНАЯ Т-головаломка

В этой головоломке Владимира Красноухова – четыре детали-пентамино, они изображены на рисунке. Их нужно расположить так, чтобы получилась фигура в виде буквы Т (как синяя деталь из набора), без засечек и других «украшений». Детали можно как угодно поворачивать и переворачивать, но нельзя накладывать друг на друга. Возможно, вам покажется, что задача не имеет решения или в условии ошибка. Это не так – не зря же головоломка называется необычной. Желаем успеха!

Е.Епифанов



КВАНТ

ЯНВАРЬ
ФЕВРАЛЬ

2014

№ 1

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

УЧРЕДИТЕЛЬ

Российская академия наук

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

А.Л.Семенов

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**А.Я.Белов, К.Ю.Богданов, Ю.М.Брук,
А.А.Варламов, С.Д.Варламов,
А.Н.Виленкин, В.И.Голубев,
Н.П.Долбиллин, С.А.Дориченко,
В.Н.Дубровский,
А.А.Егоров, А.А.Заславский, П.А.Кожевников
(заместитель главного редактора),
С.П.Коновалов, А.А.Леонович, Ю.П.Лысов,
В.В.Произволов, В.Ю.Протасов, Н.Х.Розов,
А.Б.Сосинский, А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,
В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова,
А.И.Черноуцан (заместитель главного редактора)**

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

**А.В.Анджанс, М.И.Башмаков, В.И.Берник,
В.Г.Болтянский, А.А.Боровой,
Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин, С.П.Новиков,
Л.Д.Фаддеев**

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.Кикоин

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

А.Н.Колмогоров

**Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков,
В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн,
Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов,
П.Л.Капица, В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров,
В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин,
И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский,
Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант,
Я.Е.Шнайдер**

- 2 Исчислительная геометрия. *В.Кириченко*
7 Удивительные свойства электронов. *А.Сергеев*
12 Задача о самопересекающейся ломаной. *А.Шаповалов,
А.Лебедев*

НАШИ ОБЛОЖКИ

- 15 Портрет гения
52 Зимние причуды солнечных лучей

НОВОСТИ НАУКИ

- 16 Премия теоретикам за эксперимент. *Л.Белопухов*

ИЗ ИСТОРИИ НАУКИ

- 20 Открытие явления сверхпроводимости... *А.Варламов*

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 25 Задачи M2326–M2333, Ф2333–Ф2339
27 Решения задач M2309–M2315, Ф2315–Ф2322

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Инерция
«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ
35 Задачи
36 Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»
36 42-й Уральский турнир юных математиков. *И.Рубанов,
Л.Медников*

ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 39 Тайна лунных недр. *И.Акулич*
40 Цилиндрическое зеркало-трубка. *А.Андреев, А.Панов*
41 Зачем «близоруко щуриться»? *А.Стасенко*

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 43 Ортоцентр, середина стороны, точка пересечения касательных и... еще одна точка! *Ю.Блинков*

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- 47 Когда помогают графики. *М.Бондаров*

ИНФОРМАЦИЯ

- 53 Школьный конкурс РЭШ по экономике

ОЛИМПИАДЫ

- 54 XXXV Турнир городов
55 XVIII Международная астрономическая олимпиада

НАМ ПИШУТ

- 57 И снова о числе Эйлера в треугольнике Паскаля
58 Ответы, указания, решения
Поправки (11, 38)

НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье Л.Белопухова*
II *Коллекция головоломок*
III *Шахматная страничка*
IV *Прогулки с физикой*

Исчислительная геометрия

В.КИРИЧЕНКО

Введение

Исчислительная геометрия считает число геометрических объектов с заданными свойствами. Одна из самых первых задач исчислительной геометрии – это задача Аполлония.

Задача 1 (Аполлоний). *Сколько окружностей касается трех заданных окружностей на плоскости?*

Эта задача была решена еще в Древней Греции в третьем веке до нашей эры. Ответ зависит от взаимного расположения окружностей. Отбросим конфигурации из трех окружностей, для которых ответ бесконечен. Для остальных конфигураций оказывается, что максимальный возможный ответ – восемь, а вообще ответ может быть и любым меньшим числом, кроме семи.

В задаче Аполлония все окружности, касающиеся трех данных, можно найти явно. Например, можно построить такие окружности с помощью циркуля и линейки. Однако в большинстве других задач исчислительной геометрии можно найти число объектов с заданными геометрическими свойствами, не находя при этом сами объекты. Часто даже бывает, что найти явно сами объекты невозможно, зато несложно вычислить, сколько их будет.

Один из примеров такой ситуации дает основная теорема алгебры.

Теорема (Основная теорема алгебры). *Многочлен степени n имеет ровно n комплексных корней с учетом кратностей.*

При этом найти сами корни явно (например, в радикалах) в большинстве случаев нельзя. Как мы увидим ниже, основную теорему алгебры можно сформулировать и доказать в рамках исчислительной геометрии.

В девятнадцатом веке исчислительная геометрия была одной из самых популярных областей математики. Было решено множество конкретных задач, а, кроме того, немецкий математик Герман Шуберт разработал единый эффективный метод, позволяющий решать задачи исчислительной геометрии средствами алгебры. Шуберт назвал свой метод *исчислением условий*, но теперь метод Шуберта чаще называют *исчислением Шуберта*. В этой статье мы решим методом Шуберта такую задачу.

Задача 2 (Шуберт). *В трехмерном пространстве заданы четыре попарно скрещивающиеся прямые. Сколько прямых пересекают все четыре данные прямые?*

Возможных ответов четыре: две, одна, ни одной или бесконечно много.

Эту задачу можно решать по-разному. Один из способов вытекает из задачи 5. Мы же разберем решение Шуберта. При этом нас будут интересовать только те конфигурации из четырех прямых, для которых ответ конечен и при этом максимален. Оказывается, что если чуть-чуть подвигать прямые в такой конфигурации, то ответ не изменится. Это один из фундаментальных принципов исчисления Шуберта – *принцип сохранения числа*. Пользуясь этим принципом, можно заменять одну конфигурацию прямых на другую, более удобную. Сначала мы познакомимся с принципом сохранения числа в более простом случае, а потом используем его для решения задачи Шуберта.

Принцип сохранения числа

Проиллюстрируем принцип сохранения числа на примере, связанном с основной теоремой алгебры. Рассмотрим функцию вещественного переменного,

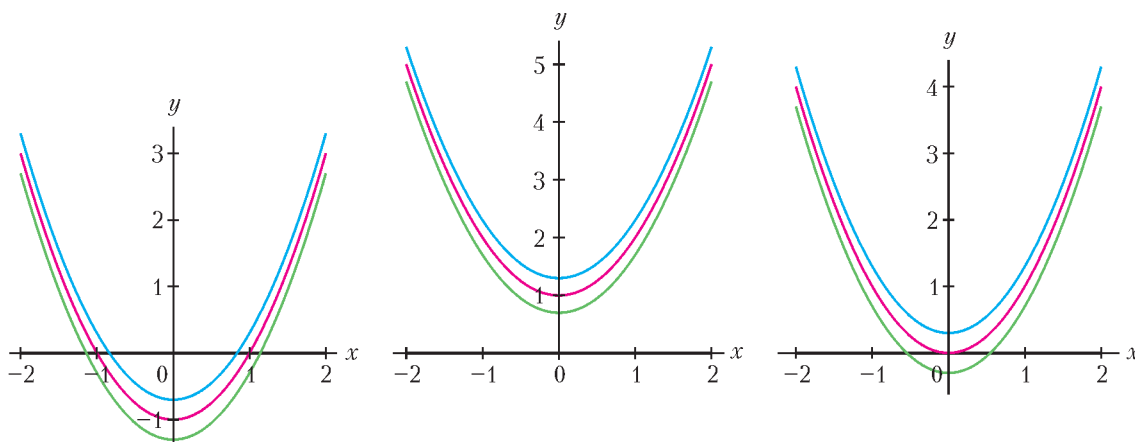


Рис.1. Сдвиги парабол

заданную многочленом

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

степени n с вещественными коэффициентами a_0, \dots, a_n , где $a_n \neq 0$. Сколько точек пересечения у графика функции $y = f(x)$ с осью x ? Этот вопрос эквивалентен вопросу о том, сколько вещественных корней у многочлена $f(x)$, но для наглядности мы будем рисовать график функции. Давайте чуть-чуть пошевелим график функции $y = f(x)$, а именно, заменим многочлен f на многочлен $f + \varepsilon$, где ε – вещественное число, близкое к нулю. Изменится ли число точек пересечения, если вместо графика функции $y = f(x)$ рассмотреть график функции $y = f(x) + \varepsilon$?

Рисунок 1 показывает, что может произойти, для трех многочленов $f_1(x) = x^2 - 1$, $f_2(x) = x^2 + 1$ и $f_3(x) = x^2$. Их графики нарисованы красным цветом. Синим цветом нарисованы графики функций $f_1 + \varepsilon$, $f_2 + \varepsilon$ и $f_3 + \varepsilon$ для $\varepsilon = 0,3$. Кроме того, зеленым цветом нарисованы графики функций $f_1 - \varepsilon$, $f_2 - \varepsilon$ и $f_3 - \varepsilon$.

Заметим, что число точек пересечения графика функции f_1 не меняется при прибавлении или вычитании ε (число точек пересечения равно 2). То же верно и для f_2 (число точек пересечения равно нулю). Однако для f_3 число точек пересечения меняется: график функции f_3 пересекает ось x в одной точке, тогда как график функции $f_3 - \varepsilon$ – в двух, а график функции $f_3 + \varepsilon$ – ни в одной. Причем легко проверить, что ситуация не меняется, как бы мы ни уменьшали ε . В чем разница между многочленами f_1 , f_2 и f_3 ? Почему принцип сохранения числа выполняется для f_1 и f_2 , но не выполняется для f_3 ? Разница видна на рисунке 1: график функции f_3 касается оси x , а графики функций f_1 и f_2 – нет. Иными словами, только многочлен f_3 имеет кратный корень. Заметим, что точка касания даже при малом шевелении графика может распасться на две точки пересечения или, наоборот, исчезнуть.

Оказывается, для многочленов справедлив следующий принцип сохранения числа.

Предложение 1. Если вещественный многочлен f не имеет кратных корней, то при достаточно маленьком ε многочлены f и $f + \varepsilon$ имеют одинаковое число вещественных корней.

В частности, этот принцип справедлив для многочленов с максимально возможным числом попарно различных корней, поскольку такие многочлены кратных корней не имеют.

Упражнение 1. Докажите, что вещественный многочлен степени n не может иметь более чем n вещественных корней. Приведите пример вещественного многочлена степени n , имеющего ровно n корней.

Для доказательства принципа нужно использовать то, что график функции $y = f(x)$ в точке $a = (x_0, f(x_0))$ хорошо приближается касательной к графику в точке a . Например, на рисунке 2 в трех разных масштабах изображены график функции

$y = \frac{1}{2}x^2 + x$ (красная линия) и касательная к нему в точке $(0, 0)$. Видно, что чем больше масштаб, тем лучше график приближается касательной. Пусть теперь a – одна из точек пересечения графика $y = f(x)$ с осью x . Поскольку график не касается оси x , то касательная в точке a не горизонтальна, а, следовательно, является графиком строго убывающей или строго возрастающей линейной функции. Поэтому то же верно и для $f(x)$ при x , близком к a , и функция f принимает каждое значение, достаточно близкое к нулю, ровно один раз. В частности, при маленьком ε найдется ровно одна точка a' , близкая к a , такая что $f(a') = -\varepsilon$. Тем самым, каждому корню a многочлена f соответствует ровно один корень a' многочлена $f + \varepsilon$.

Похожими рассуждениями можно доказать более общее утверждение.

Предложение 2. Если вещественный многочлен f степени n не имеет кратных корней, то при достаточно маленьком ε и $k \leq n$ многочлены f и $f + \varepsilon x^k$ имеют одинаковое число вещественных корней.

Задача 3. Докажите предложение 2.

(Указание: рассмотрите функцию $\frac{f}{x^k}$.)

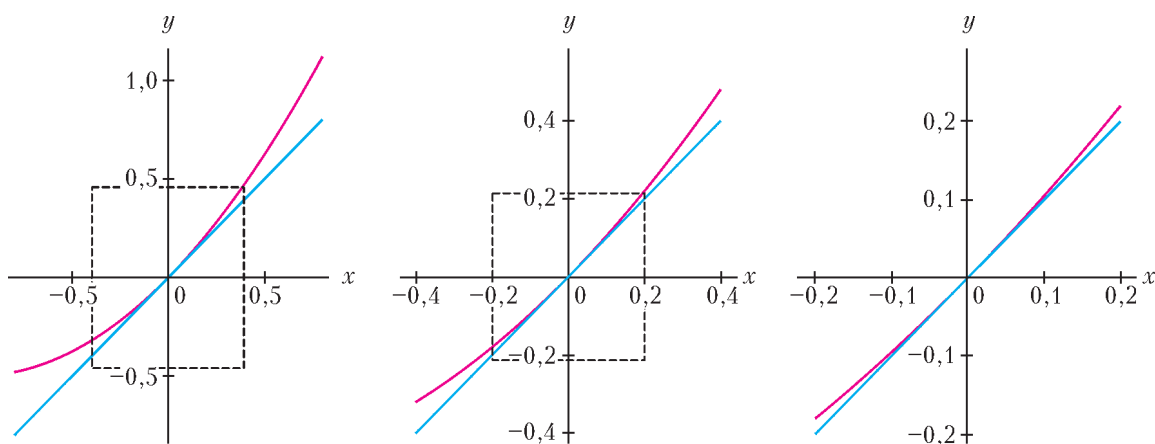


Рис.2. Касательная приближает график

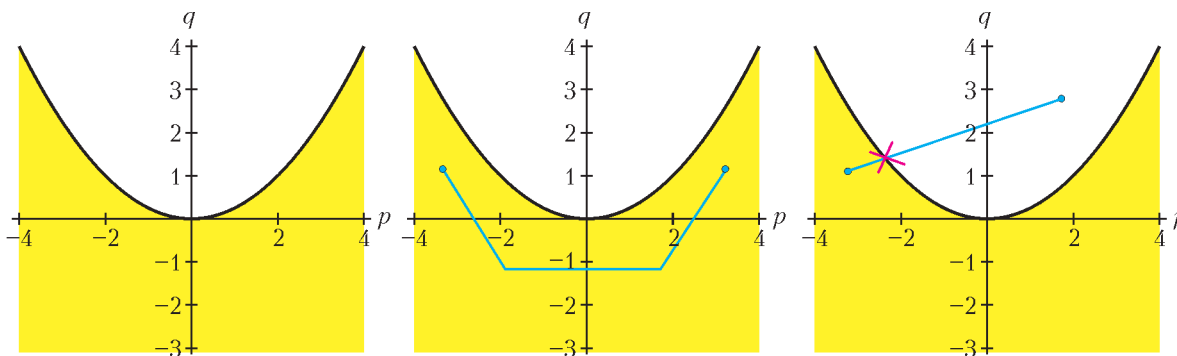


Рис.3. Дискриминант квадратного многочлена $x^2 + px + q$

Отсюда следует общий принцип сохранения числа для многочленов без кратных корней: если немного изменить каждый из коэффициентов многочлена, то число его корней не изменится. Этот принцип справедлив также для комплексных многочленов и для числа их комплексных корней. Из него можно вывести основную теорему алгебры.

На пути к основной теореме алгебры

Для иллюстрации сначала рассмотрим случай вещественных квадратных многочленов. Будем изображать многочлены вида $f = x^2 + px + q$ точками с координатами (p, q) на плоскости. Тогда многочлены, имеющие кратные корни, будут лежать на дискриминанте, т.е. на параболе $q = \frac{p^2}{4}$ (это следует из формулы для корней квадратного уравнения). Дискриминант делит плоскость на две компоненты (белая и желтая части на рисунке 3). Заметим, что все многочлены в каждой из компонент имеют одинаковое число нулей. Действительно, любые две точки, скажем, в желтой компоненте можно соединить путем, не пересекающим дискриминант. При небольших передвижениях вдоль этого пути число корней сохраняется, поэтому оно сохраняется и на всем пути. Таким образом легко доказать, что все многочлены в желтой компоненте имеют ровно два вещественных корня – достаточно найти число корней одного-единственного многочлена из желтой области, например многочлена $x(x - 1)$. Аналогично, можно проверить, что все многочлены в белой компоненте не имеют вещественных корней. Число корней многочленов в белой компоненте может отличаться (и действительно отличается) от числа нулей многочленов в желтой компоненте, потому что из белой компоненты нельзя пройти в желтую, не пересекая дискриминант.

Оказывается, похожее рассуждение в комплексном случае доказывает основную теорему алгебры. В качестве примера снова рассмотрим квадратные многочлены, а именно, многочлены вида $x^2 + a$, где a – комплексное число. Будем изображать многочлен $x^2 + a$ точкой a на комплексной плоскости. При этом дискриминант, т.е. множество многочленов с кратными корнями, будет состоять из одной-единственной точки $a = 0$. Заметим, что дискриминант в этом случае не делит плоскость на разные компоненты, так как любые две точки, отличные от начала координат,

можно соединить путем, не проходящим через начало координат. В частности, многочлен $z^2 + 1$ имеет столько же комплексных корней, сколько и многочлен $z^2 - 1$, поскольку из точки 1 можно пройти в точку -1 , не заходя в начало координат (рис.4).

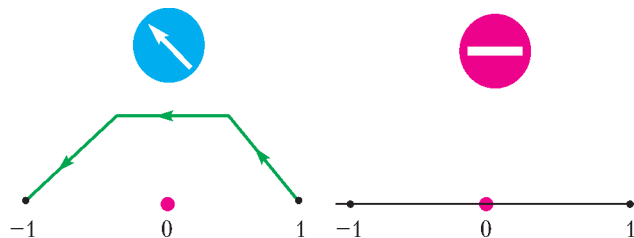


Рис.4. Разница между комплексным случаем (слева) и вещественным (справа)

Заметим, что если разрешить двигаться только по вещественной прямой (т.е. рассматривать только вещественные значения параметра a), то обойти начало координат нельзя. В этом ключевая разница между комплексным случаем и вещественным: в комплексном случае дискриминант всегда можно обойти.

Задача 4. Проверьте, что многочлен $f(x) = x^3 + px + q$ имеет кратный корень тогда и только тогда, когда $4p^3 + 27q^2 = 0$.

а) Докажите, что если $4p^3 + 27q^2 \neq 0$, то многочлен f имеет ровно три попарно различных комплексных корня.

б) При каких вещественных значениях параметров p и q многочлен f имеет ровно один вещественный корень?

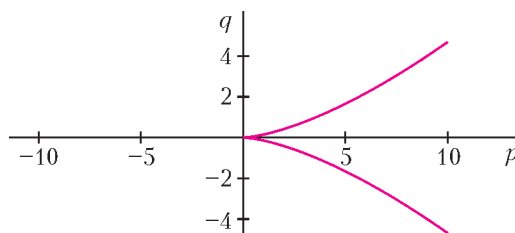


Рис.5. Дискриминант кубического многочлена $x^3 + px + q$

Кривая, заданная уравнением $4p^3 + 27q^2 = 0$ на плоскости с координатами (p, q) , называется *полукубической параболой*. Она изображена на рисунке 5.

Задача Шуберта

Теперь вернемся к задаче 2. Идея Шуберта – вместо четырех попарно скрещивающихся прямых рассмотреть следующий специальный случай: прямые l_1 и l_2 пересекаются, и прямые l_3 и l_4 – тоже (на рисунке 6 эти четыре прямые нарисованы синим цветом). Пусть

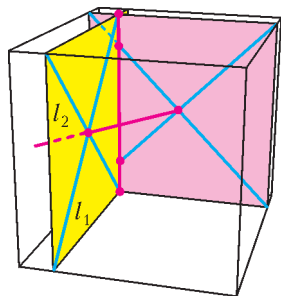


Рис.6. Специальный случай задачи Шуберта

прямые l_1 и l_2 пересекаются в точке a . Тогда они лежат в одной плоскости, которую мы обозначим через P . Точку пересечения прямых l_3 и l_4 обозначим через a' , а содержащую их плоскость – через P' . Легко проверить, что ровно две прямые пересекают все четыре прямые l_1, l_2, l_3 и l_4 : прямая, проходящая через точки a и a' , и прямая пересечения плоскостей P и P' (на рисунке 6 эти две прямые нарисованы красным цветом). Конечно, может оказаться, что прямая пересечения плоскостей P и P' параллельна, скажем, прямой l_1 , но такая ситуация исправляется небольшим поворотом прямой l_1 в плоскости P (относительно точки a), поэтому является слишком вырожденной.

То, что специальный случай даст тот же ответ, что и общий, Шуберт не обосновывал, и поэтому его современники неоднократно пытались уличить его, приводя примеры, в которых вырожденный случай дает неверный ответ (один из таких примеров фигурировал на рисунке 1). Однако во всех вычислениях Шуберта ответ получался правильным, т.е. его конфигурации хотя и были специальными, но не были вырожденными. Давид Гильберт включил проблему обоснования вычислений Шуберта в свой знаменитый список проблем под номером 15. Попытки решить эту проблему способствовали развитию некоторых важных направлений современной математики, таких как *алгебраическая геометрия*. С тех пор методы Шуберта были частично обоснованы с помощью *теории пересечений* (последняя и была создана во многом для того, чтобы формализовать исчисление Шуберта), но в полном объеме 15-я проблема Гильберта пока не решена.

Давайте попробуем обосновать рассуждение Шуберта. Нам нужно проверить, что конфигурация на рисунке 6 не слишком вырожденная, т.е. при малых шевелениях ответ не меняется. Например, давайте пошевелим немного прямую l_1 так, чтобы новая прямая l'_1 уже не пересекала прямую l_2 . Получим новую конфигурацию из четырех прямых l'_1, l_2, l_3 и l_4 (на рисунке 7 прямая l'_1 нарисована зеленым цветом). Несложно проверить, что по-прежнему ровно две прямые пересекают все четыре прямые новой конфигурации. Действительно, если прямая l пересекает прямые l_3 и l_4 , то она либо проходит через точку a' , либо лежит в плоскости P' . В первом случае она обязана лежать как в плоскости, содержащей точку a' и прямую l'_1 , так и в плоскости, содержащей точку a' и прямую l_2 , а следовательно,

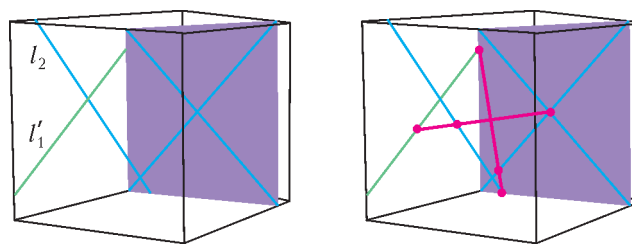


Рис.7. Задача Шуберта

совпадает с прямой пересечения этих двух плоскостей. Во втором случае прямая l должна проходить через точки пересечения прямых l'_1 и l_2 с плоскостью P' , что тоже определяет прямую однозначно (см. рис.7).

Те же рассуждения показывают, что если вместо прямой l_1 пошевелить любую другую прямую в исходной конфигурации, то ответ по-прежнему не изменится. Тем самым, исходная конфигурация не слишком вырожденная – для нее выполняется принцип сохранения числа.

Исчисление Шуберта

Пока мы обходились геометрическими рассуждениями, а теперь обсудим алгебраическую часть метода Шуберта. Преимущество алгебраического метода в его универсальности – он работает и в более сложных задачах, где геометрической интуиции уже не хватает.

Определим *условие* σ_i на прямую l таким образом: условие σ_i выполнено, если прямая l пересекает фиксированную прямую l_i . Условия можно складывать и умножать. Под суммой нескольких условий будем понимать выполнение хотя бы одного из условий (то, что в логике называется *дизъюнкцией*), а под произведением – выполнение всех условий одновременно (т.е. *конъюнкцию*). Тогда, скажем, условие $\sigma_1 + \sigma_2$ есть условие пересечения с l_1 или l_2 , а выполнение условия $\sigma_1 \cdot \sigma_2$ равносильно пересечению с обеими прямыми l_1 и l_2 . Условие пересечения прямой l со всеми четырьмя прямыми l_1, l_2, l_3, l_4 – это условие $\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 \cdot \sigma_4$. Легко проверить, что сложение и умножение условий удовлетворяет обычным свойствам сложения и умножения, таким как переместительный, сочетательный и распределительный законы.

Другие примеры условий на прямую l можно получить, рассматривая взаимное расположение прямой l и фиксированной точки a или плоскости P . Например, условие ρ_a выполнено, если прямая l содержит точку a , а условие τ_P выполнено, если прямая l лежит в плоскости P . Кроме того, если $a \in P$, то можно рассмотреть условие $\Phi_{a,P}$, которое выполняется, если прямая l одновременно лежит в плоскости P и содержит точку a . По определению умножения условий, $\rho_a \cdot \tau_P = \Phi_{a,P}$.

Если условию ξ удовлетворяет лишь конечное число прямых, то мы будем обозначать это число через $|\xi|$. Теперь любая задача исчислительной геометрии, в которой речь идет о числе прямых, находящихся в заданном взаимном расположении с фиксированными точками, прямыми или плоскостями, может быть переформулирована как вычисление некоторого произве-

дения условий. Например, задача о том, сколько прямых проходит через две различные точки a_1 и a_2 – это задача о вычислении произведения $\rho_{a_1} \cdot \rho_{a_2}$. Поскольку через две различные точки проходит ровно одна прямая, получаем $|\rho_{a_1} \cdot \rho_{a_2}| = 1$.

Упражнение 2. Зафиксируем точку a , прямые l_1 и l_2 и плоскости P_1 и P_2 в общем положении (т.е. точка не лежит ни в одной из прямых или плоскостей, прямые не совпадают и не лежат в плоскостях и т.д.). Проверьте, что $|\tau_{P_1} \tau_{P_2}| = 1$, $|\rho_a \cdot \tau_{P_1}| = 0$, $|\rho_a \cdot \sigma_{l_1} \cdot \sigma_{l_2}| = 1$, $|\tau_P \cdot \sigma_{l_1} \cdot \sigma_{l_2}| = 1$.

Мы будем считать два условия равными, если им удовлетворяют одни и те же прямые. Например, если прямые l_1 и l_2 пересекаются в точке a , то очевидно выполняется такое тождество:

$$\sigma_{l_1} \cdot \sigma_{l_2} = \rho_a + \tau_P, \quad (1)$$

где P – плоскость, содержащая прямые l_1 и l_2 . Ключевая идея Шуберта – заменять одни условия на другие, пользуясь не только отношением равенства $=$, но и более широким отношением эквивалентности \sim . В частности, условия, которым удовлетворяет лишь конечное число прямых, естественно считать эквивалентными, если это число одно и то же. Будем обозначать через ν все условия, которым удовлетворяет ровно одна прямая (например, условие $l = l_1$).

Теперь определим отношение эквивалентности на условиях σ_{l_i} , ρ_a и τ_P , рассмотренных выше, а именно, скажем, что $\sigma_{l_1} \sim \sigma_{l_2}$ для любых двух прямых l_1 и l_2 . Это довольно естественное определение, поскольку любую прямую можно перевести в любую другую движением пространства. Аналогично, положим $\rho_{a_1} \sim \rho_{a_2}$ для любых двух точек a_1 и a_2 и $\tau_{P_1} \sim \tau_{P_2}$ для любых двух плоскостей P_1 и P_2 . Наконец, положим $\phi_{a_1, P_1} \sim \phi_{a_2, P_2}$, если $a_1 \in P_1$ и $a_2 \in P_2$. В дальнейшем мы будем обозначать все условия из этих классов эквивалентности просто через σ , ρ , τ и ϕ соответственно, опуская нижние индексы. Однако при вычислении всевозможных произведений с σ , ρ , τ и ϕ мы всегда будем требовать, чтобы соответствующие прямые, точки и плоскости находились в общем положении (как в упражнении 2). Например, чтобы вычислить σ^2 , нужно вычислить $\sigma_{l_1} \cdot \sigma_{l_2}$ для двух прямых l_1 и l_2 в общем положении (в частности, $l_1 \neq l_2$). Это требование необходимо для того, чтобы введенное нами отношение эквивалентности было согласовано с умножением. Из упражнения 2 следует, что

$$\rho^2 \sim \tau^2 \sim \nu, \quad \rho\tau \sim 0, \quad \rho\sigma^2 \sim \tau\sigma^2 \sim \nu.$$

Здесь важно, что под ρ^2 мы подразумеваем $\rho_{a_1} \cdot \rho_{a_2}$ для $a_1 \neq a_2$, поскольку при $a_1 = a_2$ мы бы получили $\rho_{a_1} \cdot \rho_{a_2} = \rho_{a_1} \neq \nu$.

Равенство (1) для двух пересекающихся прямых наводит на мысль, что для произвольных прямых есть эквивалентность

$$\sigma^2 \sim \rho + \tau. \quad (2)$$

Пользуясь этой эквивалентностью, найдем, сколько прямых пересекают четыре данные прямые в общем

положении. Для этого надо вычислить σ^4 . Домножив обе части эквивалентности (2) на σ^2 , получим

$$\sigma^4 \sim \rho\sigma^2 + \tau\sigma^2.$$

Из упражнения 2 мы знаем, что $|\rho\sigma^2| = |\tau\sigma^2|$, откуда $|\sigma^4| = 2$. Тем самым, число прямых, пересекающих четыре данные, равно двум.

Чтобы завершить таблицу умножения условий σ , ρ , τ и ϕ , осталось совсем немного.

Упражнение 3. Проверьте, что $\sigma\rho \sim \sigma\tau \sim \phi$ и $\sigma\phi \sim \nu$.

Исчислению условий и его многочисленным приложениям к конкретным задачам исчислительной геометрии Шуберт посвятил целую книгу «Kalkul der Abzählenden Geometrie», изданную в 1879 году. Спустя сто лет книга Шуберта была впервые переиздана, а интерес к исчислительной геометрии вновь вырос – оказалось, что она важна для *теории струн*, новой физико-математической теории, призванной единым образом объяснить природу всех физических взаимодействий.

Читатель наверняка отметил недостаточную строгость некоторых наших рассуждений. К сожалению, на элементарном уровне полностью обосновать исчисление Шуберта невозможно. Более строгое изложение исчисления Шуберта можно найти в статье [1].

Из задачи 5 можно вывести другое, более элементарное, решение задачи Шуберта.

Задача 5. Докажите, что прямые в трехмерном пространстве, пересекающие три попарно скрещивающиеся прямые, заматают поверхность, заданную уравнением степени два. (На самом деле, такая поверхность – либо однополостный гиперболоид, либо гиперболоический параболоид.)

Подробности можно найти в книге 2. Нужно использовать то, что на гиперболоиде есть два семейства прямых. Кстати, этот факт применяется не только в математике, но и в архитектуре (например, в конструкции Шуховской башни).

Список литературы

1. S.L. Kleiman and Dan Laksov. Schubert calculus. – The American Mathematical Monthly, v. 79, №10, 1972, p.1061–1082.
2. М. Рид, Алгебраическая геометрия для всех. – М.: Мир, 1991.

Удивительные свойства электронов

А. СЕРГЕЕВ

Им главное – название придумать. Пока не придумал – смотреть на него жалко, дурак дураком. Ну а как придумал какой-нибудь гравиконцентрат – тут ему словно все понятно становится, и сразу ему жить легче.

Аркадий и Борис Стругацкие. Пикник на обочине

НЕСКОЛЬКО ЛЕТ НАЗАД ФИЗИКАМИ-ТЕОРЕТИКАМИ было предсказано существование необычных веществ – *топологических изоляторов*. Чуть позже они были обнаружены экспериментально. Эти материалы обладают целым набором удивительных свойств, подробный рассказ о которых занял бы не один десяток страниц. Поэтому сегодня мы поговорим лишь об одном, но в каком-то смысле главном, свойстве, ставшем визитной карточкой топологических изоляторов:

в толще вещества топологический изолятор является диэлектриком, а его поверхность проводит электрический ток.

Другими словами, по поверхности диэлектрика электроны движутся так же свободно, как в металле.

Причиной столь странного поведения электронов является запрет отражения назад. У этого запрета, в свою очередь, есть глубокие математические предпосылки (откуда берутся сами математические предпосылки, лучше не задумываться).

В этой статье мы попробуем разобраться, почему электрон, скользящий по поверхности топологического изолятора, встретившись с препятствием, не может отскочить в обратном направлении. Для этого рассмотрим несколько слабо связанных друг с другом сюжетов из разных областей физики и математики. Присмотритесь внимательно к каждому кусочку этой головоломки, и вы увидите, как они складываются друг с другом и образуют цельную картину.

Для экспериментов – куда же без них? – вам понадобятся лист бумаги, ножницы, карандаш, глобус без подставки, кружка с водой и воображаемый воздушный шарик.

Маятник Фуко (Недорогой эксперимент глобального масштаба)

Начнем издалека. Возможно, вам приходилось видеть маятник Фуко. Тяжелый шар, подвешенный на тросе, уходящем куда-то ввысь, неспешно и устрашающе раскачивается, с каждым взмахом проходя все ближе к деревянной дощечке, звук падения которой на мраморный пол становится для зрителей осязаемым

доказательством вращения Земли. Но доказательство отнюдь не очевидной связи между поворотом плоскости колебаний маятника с вращением планеты, как правило, остается за кулисами эффектного опыта. Как и тот факт, что не в любой точке земного шара плоскость колебаний маятника Фуко будет поворачиваться – на экваторе, например, этого не произойдет. А на полюсах скорость поворота плоскости колебаний будет самой большой – за сутки она повернется на 360 градусов.

Хотите узнать, как без единой формулы объяснить поворот плоскости колебаний маятника Фуко и, более того, изучить угловую зависимость скорости этого поворота от географической широты? Тогда вырежьте из бумаги круг и нарисуйте по его краю ряд параллельных векторов, как показано на рисунке 1 слева.

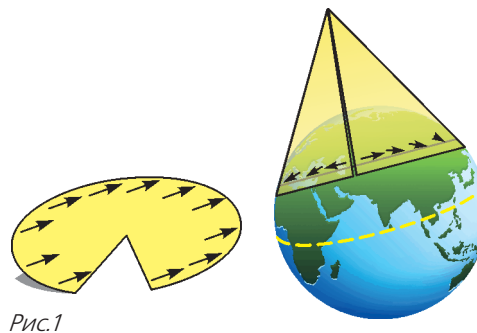


Рис.1

Затем сделайте надрез по радиусу и загните некоторый сектор круга. Теперь сомкните края пустого сектора – у вас получится конус, по краю которого идут параллельные векторы. Впрочем, нет, теперь они не такие уж и параллельные! При обходе вдоль основания конуса вектор поворачивается. Нетрудно видеть, что угол поворота равен углу пустого сектора развертки конуса.

Теперь, если лист бумаги был достаточно большим или если ваш глобус достаточно мал, можете надеть конус на глобус так, чтобы он коснулся земного шара по некоторой параллели (см. рис. 1 справа). Угол поворота вектора, нарисованного на конусе, будет равен (за вычетом 2π) углу, на который повернется за сутки плоскость расположенного на этой параллели маятника Фуко. На другой параллели угол при вершине касательного конуса будет другим, значит, изменится и угол поворота. В этом можно легко убедиться, изменяя величину угла пустого сектора развертки. Например, если конус касается глобуса по

параллели, соответствующей 30° северной широты, то вектор развернется на π радиан.

Мы только что проиллюстрировали математическое понятие параллельного переноса вектора на искривленной поверхности. Суть его состоит в том, чтобы перемещать вектор «как можно параллельнее самому себе» при условии, что вектор все время должен лежать в касательной плоскости к поверхности, на которой он живет. Другими словами, если подойти к искривленной поверхности так близко, что она покажется плоской, векторы должны быть параллельны в обычном смысле слова. Что мы и видим, развернув конус на плоскости. В точке, лежащей на параллели – на той окружности, по которой конус касается сферы, – у конуса и сферы общая касательная плоскость. А это значит, что параллельный перенос вектора по данной окружности на сфере можно исследовать с помощью конуса.

Но, казалось бы, какая связь между векторами на конусе и маятником Фуко? Для ответа нужно вспомнить о моменте импульса и законе его сохранения. Допустим, у нас есть гироскоп в кардановом подвесе, позволяющем ему свободно изменять направление оси. Направим его ось на некоторую удаленную звезду (Полярная звезда нам не подойдет) и раскрутим диск. Тогда вектор момента импульса, перпендикулярный плоскости диска, постоянно будет направлен на эту звезду, в силу соответствующего закона сохранения. Это означает, что в лабораторной системе отсчета, связанной с поверхностью Земли, ось гироскопа будет поворачиваться вслед за направлением на выбранную звезду.

Теперь применим закон сохранения момента импульса к маятнику Фуко. Вектор момента импульса будет направлен перпендикулярно плоскости колебаний маятника. Но, в отличие от гироскопа, момент импульса маятника не может быть постоянно направлен на одну звезду, поскольку маятник колеблется под действием силы тяжести, направленной к центру масс Земли. Получается, что вектор момента импульса должен быть направлен по касательной к земной поверхности и при этом перемещаться «как можно параллельнее самому себе», что является следствием закона сохранения импульса с учетом наложенных ограничений. Таким образом, для вектора момента импульса маятника Фуко, переносимого вращением Земли по поверхности сферы, выполняется условие параллельного переноса. Действительно, по закону сохранения момента импульса маятник «хочет» колебаться все время в одной плоскости. Однако, из-за того что сила тяжести направлена к центру Земли, вектор нормали к плоскости колебаний всегда должен быть направлен по касательной к земной поверхности. Иными словами, речь идет о параллельном переносе вектора на сфере. Из этого следует, что бумажный конус с нарисованными векторами не является «упрощенной моделью» или «подгоном под ответ»: кривизна поверхности Земли и есть непосредственная причина поворота плоскости, в которой колеблется маятник Фуко.

В квантовой механике поворот вектора при параллельном переносе называется фазой Берри, по имени

первооткрывателя сэра Майкла Берри, который изучал волновые функции в гильбертовом пространстве и в некотором смысле обнаружил, что «Земля круглая». С фазой Берри мы еще встретимся.

Топология

(Как определить форму планеты)

Знаете ли вы, в чем принципиальная разница между булочкой и бубликом? Когда вы съедаете булочку, не остается ничего, а когда съедаете бублик, от него остается дырка. Подобного рода отличиями и занимается топология. Говоря чуть более строго, топология – часть математики, изучающая свойства геометрических объектов, которые не изменяются при плавных деформациях. Другими словами, объект можно гнуть, мять, изгибать, но нельзя разрезать и склеивать разные части. Казалось бы, если взять любой геометрический чертеж и позволить себе мысленно изогнуть все эти отрезки, окружности, прямые – что останется от геометрии? Окружность перестанет быть окружностью, прямая станет кривой, нарушатся все возможные теоремы. Тем не менее, существуют свойства фигур, которые сохраняются после этих разрушительных преобразований. И в шутке про дырку от бублика – лишь доля шутки.

Чтобы в этом убедиться, вам понадобится воображаемый воздушный шарик. Представьте, что вы сжимаете его с диаметрально противоположных точек, сдавливая двумя пальцами (рис.2). В какой-то момент

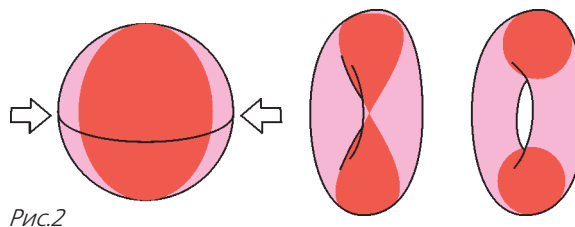


Рис.2

пальцы встретятся. Вообразите, что соединенные кусочки шарика склеились и вы тут же прорезали в центре отверстие. В топологии так делать, конечно, запрещено, но закройте на это глаза. Открыв глаза снова, вы обнаружите, что теперь у вас в руках уже не воздушный шарик, а отличная велосипедная камера. С точки зрения топологии, воздушный шарик представляет собой сферу, а поверхность бублика – тор. Только что мы совершили «склеивательно-разрывное» преобразование, которое привело к изменению топологического инварианта – числа отверстий: у сферы нет отверстий, а у тора оно одно. Чему равно число отверстий у промежуточной фигуры, получившейся в результате склеивания двух противоположных точек сферы, топология сказать не может. Максимум, что можно сделать, это дать нашей фигуре какое-нибудь название. Скажем, «НИТОНИСЕИД».

Одним из краеугольных вопросов топологии является следующий: как отличить один объект от другого? Сделать это не так просто, как кажется на первый взгляд. Чтобы визуальнo отличить сферу от тора, нужно находиться на некотором расстоянии от них.

Топология изучает *глобальные* свойства математических объектов. Долгое время люди думали, что Земля плоская. И правда, *локально* поверхность сферы не отличить от кусочка плоскости. Заклеить пробой как велосипедной камеры, так и воздушного шарика можно одной и той же плоской резиновой заплаткой.

Так возможно ли определить, на поверхности тора или сферы мы находимся? Оказывается, что возможно, и не одним способом. Прежде всего, это можно сделать с помощью длинной веревки. Обойдем нашу планету по замкнутой траектории, разматывая веревку (рис.3). После возвращения в исходную точку возьмемся за оба конца веревки и станем ее вытягивать. Если мы живем на сфере, то витки веревки «соскользнут» с нее, и вся веревка снова окажется у нас в руках. Если же мы живем на торе или на планете с большим числом отверстий, например имеющей форму восьмерки, то веревка неизбежно «застрянет» на них, и мы не сможем ее вытянуть (не забывайте, что веревка все время должна лежать на поверхности планеты). Правда, отличить тор от «восьмерки» таким методом не получится: веревка застрянет и в том, и в другом случае.

Второй способ позволит подсчитать количество отверстий в планете, не сходя с ее поверхности, но он уже потребует измерений и вычислений. В каждой точке поверхности можно измерить величину, называемую гауссовой кривизной и равную $1/(R_1 R_2)$. Здесь R_1 и R_2 – максимальное и минимальное значения радиуса кривизны R сечения поверхности плоскостью,

содержащей нормаль к поверхности в данной точке (рис.4). Кстати, есть интересный и совершенно не очевидный факт: две плоскости, соответствующие значениям R_1 и R_2 , перпендикулярны.

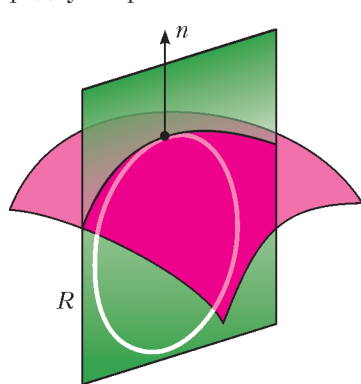


Рис.4

Итак, представим себе землемера, который обходит планету, измеряет ее гауссову кривизну в каждой точке, домножает на элемент площади и складывает все эти числа (проще говоря, берет поверхностный интеграл от кривизны). Казалось бы, он занимается чистой геометрией – ведь если планету деформировать, значения радиусов кривизны изменятся! Тем удивительнее результат, известный в математике как теорема Гаусса–Бонне: интеграл от гауссовой кривизны по площади замкнутой поверхности равен $4\pi(1-g)$, где g – число отверстий, называемое также родом поверхности. Правда, применить эту замечательную теорему к нитонисёиду не удастся: в центральной точке гауссова кривизна не определена.

Частицы или волны? (Если видишь на картине...)

Вернемся к физике.

Вы, конечно, знаете про корпускулярно-волновой дуализм, т.е. двойственную природу частиц. Иногда частицы ведут себя как частицы, иногда – как нечто среднее. Одним из впечатляющих экспериментов, свидетельствующих о волновой природе частиц, является опыт по дифракции электронов. Впечатляющий – потому что этот опыт столь же сильно противоречит здравому смыслу, сколь хорошо согласуется с квантовой механикой.

Запустим электрон в сторону мишени, преградив ему путь экраном с двумя щелями. Электрон окажется в некоторой точке мишени. Пока что в этом нет ничего удивительного – он пролетел через одну из щелей и попал в мишень. Запустим второй электрон, третий, четвертый. Будем делать это так редко, что электроны не смогут взаимодействовать друг с другом. После накопления достаточно большой статистики посмотрим, в какие части мишени попали электроны. Думаете, они распределятся по мишени равномерно? Как бы не так!

На мишени будут полосы, в которые попало множество электронов, и полосы, в которые не попал ни один

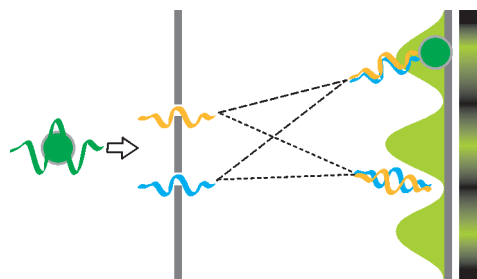


Рис.5

электрон (рис.5). Форма и яркость полос будут качественно воспроизводить дифракционную картину света на двух щелях.

Согласитесь: результат невероятный. Получается, что каждый отдельный электрон «знает» обо всей дифракционной картине и обязательно попадает в одну из «разрешенных» полос. Объясняется это так: каждый электрон, подлетая к экрану, как бы испытывает раздвоение личности и пролетает сразу через обе щели. При этом он интерферирует сам с собой, поскольку является по совместительству волной!

Иными словами, электрон-волна разделяется на две части, которые проходят через разные щели и могут прийти в ту или иную точку экрана с той или иной разностью фаз. Если в какой-то точке мишени разность фаз составляет π , т.е. две части волны приходят в противофазе, электрон-частица в эту точку никогда не попадет. Такие точки образуют на картине темные полосы.

Мы еще столкнемся с этой манерой электрона – выбирать оба варианта из предложенных двух. А сейчас поговорим о его спине.

Спин электрона (Йога для теоретиков)

Хорошо ли держатся магниты у вас на холодильнике? Задумывались ли вы когда-нибудь о том, почему они не падают?

В конечном счете, магнитные свойства вещества определяются наличием у электрона спина. Природу спина обычно объясняют так: если бы электрон был просто твердым заряженным шариком, то спину соответствовал бы его собственный момент импульса. Вращение заряженного объекта можно рассматривать как кольцевой ток, а где электрический ток – там и магнитное поле, согласно опытам Эрстеда (и одному из уравнений Максвелла).

Но электрон – это не заряженный шарик. Электрон – это электрон. Частица и волна одновременно. Как волна может вращаться вокруг своей оси? Какой оси? И какой у нее может быть момент импульса? Кстати сказать, спин электрона не только не является моментом импульса, но и не является вектором вообще (не является он также тензором и, тем более, скаляром). С этим фактом связано одно его странное свойство, для экспериментального изучения которого вам понадобится кружка с водой. Не стоит наполнять ее больше, чем наполовину – вода нужна лишь для того, чтобы у вас не было соблазна перевернуть кружку вверх дном.

Поставьте кружку на стол. Ручка кружки понижает ее симметрию – задает выделенное направление. Поверните кружку на 180° по часовой стрелке или против нее, но только не в двух направлениях сразу. В этом случае ручка кружки будет смотреть в направлении, противоположном изначальному. Поверните кружку еще раз в том же направлении. Теперь ручка кружки будет направлена туда же, куда и в начале опыта. Казалось бы, при чем здесь странные свойства электрона? Правильно, совершенно ни при чем. Если вы поворачиваете любое твердое тело на 360° , оно переходит в себя, и такое преобразование называется тождественным, тривиальным или просто – скучным.

Теперь возьмите кружку в руку так, чтобы она стояла на ладони. Поверните ее на 360° – это возможно. Правда, рука при этом примет неестественное положение, проще говоря – несколько вывернется. Это важно, поскольку ваша рука символизирует вол-

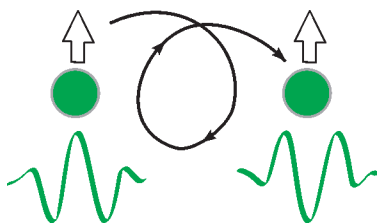


Рис.6

новую функцию электрона. При повороте спина на 360° волновая функция электрона меняет знак (рука выворачивается), т.е. это преобразование не переводит систему

«кружка + рука» в себя и не является тривиальным (рис.6). Чтобы узнать, какой поворот переводит спин электрона в начальное состояние, поверните кружку еще на 360° в ту же сторону. Поверьте, это возможно и не имеет отношения ни к занятиям йогой, ни к посещению травмпункта! Если вам это удалось – примите по-

здравления. Теперь вы знаете не понаслышке, что электрон вернется в начальное состояние лишь при повороте на 720° . Этот трюк придумал в демонстрационных целях великий Поль Дирак.

Кристалл как стробоскоп (Остановись, мгновенье)

Доводилось ли вам видеть летящий вертолет с неподвижными лопастями? На улице – едва ли, а на экране телевизора – наверняка. Это – одно из проявлений так называемого стробоскопического эффекта. У большинства видеокамер скорость съемки составляет около тридцати кадров в секунду. Значит, если винт тоже совершает тридцать оборотов в секунду, на видеозаписи он будет покоиться (отметим, что тридцать оборотов в секунду для несущего винта – цифра нереальная; но винт с четырьмя лопастями «остановится» уже на скорости чуть больше семи оборотов в секунду).

Представим себе «математический» вертолет, винт которого может вращаться сколь угодно быстро. Пусть он начал постепенно раскручиваться, и мы наблюдаем это на экране телевизора. Сначала скорость винта на изображении будет расти, затем он начнет замедляться и совсем остановится; после чего винт начнет вращаться в обратную сторону, скорость достигнет максимума и снова уменьшится до нуля и так далее. Получается, что на видеозаписи, сделанной камерой с частотой 30 кадров в секунду, все возможные скорости вращения винта лежат в интервале от минус 15 до плюс 15 оборотов в секунду! И эта ограниченность области допустимых скоростей является прямым следствием периодичности работы видеокамеры во времени.

Весьма похожая ситуация возникает, когда электрон путешествует по кристаллу. Как вы знаете, в кристалле атомы строго упорядочены – находятся в узлах кристаллической решетки, т.е. кристалл представляет собой периодическую структуру в пространстве. Все ячейки кристалла выглядят одинаково, поэтому не имеет значения, в какой именно из них находится электрон. Но имеет значение то, с какой скоростью и куда он движется. Другими словами, импульс электрона определяет его состояние. Поэтому обычно для описания энергетического состояния электрона говорят о его положении в импульсном пространстве – пространстве, каждая точка которого соответствует векторному значению импульса. А самое интересное то, что состояние электрона определяется ограниченным набором значений импульса, т.е. пространственная периодичность кристалла обуславливает компактность области импульсного пространства, необходимой для описания состояния электрона! Точно так же, как математически бесконечная ось значений угловой скорости винта «сжалась» в интервал $(-15; 15)$ оборотов в секунду, все пространство импульсов электрона в кристалле можно свернуть в небольшую замкнутую фигуру. Другими словами, электрон-волна живет на поверхности некоторой планеты в некотором хитром пространстве.

Топологические изоляторы (Вы все еще кипятите?)

Вы еще не забыли, чему посвящена эта статья? Совершенно верно, топологическим изоляторам. Осталось последнее усилие, чтобы сложить все части рассказа воедино. Или, может быть, они уже сложились в вашем сознании? Если нет, тогда еще немного внимания.

Можно сказать, что топологический изолятор отличается от обычного диэлектрика формой планеты в импульсном пространстве, на которой живет электрон. Давайте условно изобразим ее в виде сферы для любого обычного диэлектрика (вакуума в том числе) и в виде тора – для топологического изолятора (рис.7).

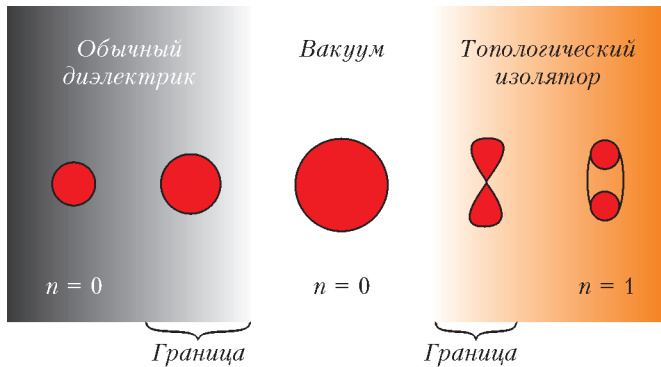


Рис.7

При этом, зная кривизну этой планеты в каждой точке, мы можем вычислить топологический инвариант, так называемый индекс Черна n , очень похожий на род поверхности – число отверстий. Для топологического изолятора индекс Черна отличен от нуля, в нашем примере $n = 1$, в то время как для обычного диэлектрика $n = 0$.

Посмотрим теперь на границу между обычным диэлектриком и вакуумом. На ней планета электрона должна иметь на нашем условном рисунке промежуточную форму между своей сферой и сферой другого радиуса, т.е. быть сферой. Но на границе между вакуумом и топологическим изолятором должно произойти нечто ужасное. Планета электрона должна быть чем-то средним между сферой и тором, т.е., как вы уже поняли, нитонисёидом! Это так же неизбежно, как и тот факт, что непрерывная функция, принимающая отрицательное значение на левом конце отрезка и положительное на правом, обязана где-то на этом отрезке обратиться в ноль.

Итак, мы видим, что электрон, скользящий по границе между топологическим изолятором и вакуумом (или любым другим обычным диэлектриком – воздухом, например), живет в импульсном пространстве на поверхности нитонисёида. Теперь представим, что такой электрон столкнулся с препятствием. Чтобы отскочить назад, он должен поменять направление импульса на противоположное. Но это означает, что он должен переместиться по поверхности нитонисёида в точку, противоположную той, в которой он сейчас находится.

Поскольку нитонисёид искривлен, в ходе этого перемещения электрон приобретет фазу Берри (вспомните маятник Фуко). Она будет равна по модулю π . Знак фазы Берри будет зависеть от пути, который выберет электрон, – ведь попасть в противоположающую точку можно двумя путями, как и на земном шаре. Одна траектория будет соответствовать развороту импульса по часовой стрелке, а другая – против. Какой же вариант выберет электрон? Правильно, оба. Это значит, что импульс одной части электрона развернется на 180° , а импульс другой на -180° . Другими словами, чтобы получить одну часть электрона из другой, нужно развернуть ее импульс на все 360° .

Отметим, что направление спина электрона в данном случае жестко связано с направлением импульса, поэтому спин будет разворачиваться схожим образом. А при таком развороте спина, как вы помните, волна электрона поменяет знак, т.е. сложившись, две части электрона дадут в сумме ноль. Следовательно, электрон, живущий на границе между топологическим изолятором и вакуумом, *не может отразиться назад после встречи с препятствием*, что и требовалось пояснить.

Как видите, мир топологических изоляторов прекрасен и удивителен. Возможно, ученые, предсказавшие их существование, прислушались к словам Дирака, произнесенным им на лекции 6 февраля 1939 года:

«Тенденция к объединению математики и физики дает физику-теоретику новый мощный метод изучения природы интересующего его объекта, метод, который не был пока что успешно применен на практике, но, я уверен, в будущем еще докажет свою значимость. Метод состоит в том, чтобы начать с выбора той области математики, которая, предположительно, ляжет в основу новой теории. В этом выборе ученый должен существенным образом руководствоваться соображениями математической красоты».

Поправка

В предыдущем номере журнала на 4-й странице обложки журнала по вине редакции приведен неправильный заголовок и текст под ним.

Должно быть так:

Как стекло сделать прочным?

Можно, например, с помощью полировки убрать микротрещины на поверхности стекла. Но это не самый эффективный способ повышения его прочности...

(Продолжение – на странице 47 внутри журнала)

Задача о самопересекающейся ломаной

А.ШАПОВАЛОВ, А.ЛЕБЕДЕВ

В ТУРНИРЕ ГОРОДОВ ОСЕНЬЮ 2013 ГОДА БЫЛА такая задача:

На плоскости нарисована замкнутая самопересекающаяся ломаная. Она пересекает каждое свое звено ровно один раз, причем через каждую точку самопересечения проходят ровно два звена. Может ли каждая точка самопересечения делить оба этих звена пополам? (Нет самопересечений в вершинах и нет звеньев с общим отрезком.)

К сожалению авторов и организаторов турнира, пока в работах школьников не удалось найти полного решения, все баллы были получены лишь за частичные продвижения. Тем удивительнее узнать, что у задачи есть сравнительно короткое решение.

Но начнем с истории, которая у задачи, наоборот, достаточно длинная и богатая.

Началось все лет 17 тому назад с придуманной А.Шаповаловым (далее А.Ш.) несложной задачки:

Замкнутая ломаная пересекает каждое свое звено ровно один раз. Может ли каждая точка самопересечения делить оба пересекающихся звена в отношении 2:1?

Ответ: может; пример легко строится. Достаточно вспомнить, что в отношении 2:1 делятся пересекающиеся медианы. А звенья ломаной должны разбиваться на пары пересекающихся. Вот и составим ломаную из пар медиан. Чтобы концы ломаной соединились, треугольники должны соприкасаться равными «боковыми»

сторонами. Естественно приходит в голову набор треугольников с общей вершиной. Вот простейший пример. Внутри произвольного треугольника ABC отметим произвольную точку O . Точки K , L и M – середины отрезков OA , OB и OC соответственно (рис. 1). Тогда пересекающиеся отрезки – это медианы одного треугольника (например, AL и BK – медианы треугольника AOB), поэтому делятся точкой пересечения в отношении 1:2. Значит, ломаная $ALCKVM$ – искомая.

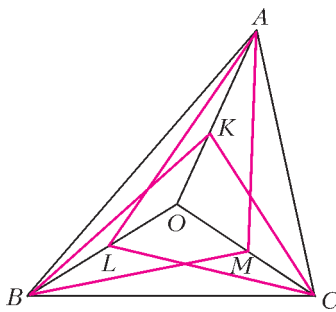


Рис.1

Можно еще заметить, что при гомотетии с центром O и коэффициентом $1/2$ треугольник ABC переходит в треугольник KLM . Заменяв коэффициент гомотетии на $p/q < 1$, мы точно так же получим замкнутую

6-звенную самопересекающуюся ломаную, где точки самопересечения делят звенья в отношении $p:q$. А вот пример с отношением 1:1 (т.е. деление звеньев строго пополам) так не получишь. Но, может быть, такой пример получается каким-то другим способом? Ведь пары пересекающихся отрезков будут диагоналями параллелограммов. А.Ш. долго возился, прикладывая параллелограммы друг к другу и так, и этак, но не преуспел. Параллелограммы упорно нелезали друг на друга. Видимо, такой ломаной не существовало, но причину запрета обнаружить не вышло. Тогда А.Ш. стал подсовывать эту задачу коллегам. У них тоже ничего не получалось. Так продолжалось долго. В 2004 году, казалось, случился прорыв: задача была дана на Московской устной олимпиаде по геометрии. Увидев это, А.Ш. обрадовался: «Решили, наконец!», но радость была преждевременной. Прочитав условие внимательнее, А.Ш. увидел, что речь идет о пространственной ломаной (см. задачу 2 для самостоятельного решения). Понятно, что эта задача легче, так как в пространстве «убить» ненужные пересечения гораздо проще.

В 2008 году случился, наконец, настоящий прорыв. Молодой математик Алексей Лебедев (далее А.Л.) решил задачу и для плоского случая. Правда, его решение опиралось на интегралы. Но оно сделало главное: выявило причину запрета. Изложить это на школьном уровне теперь не составляло труда. А.Ш. и А.Л. тут же предложили задачу на олимпиады самого высокого уровня: Международную, Всероссийскую, Московскую, Турнир городов. Задача вызвала интерес, но в варианты все не попадала. Через пару лет авторы задали прямой вопрос одному из известных геометров и члену методической комиссии Российской олимпиады: ведь отличная задача, почему не ставят в вариант? Ответ был неожиданным: «Задача очень нравится, и мы ее обязательно поставим – как только ее сможет решить кто-нибудь еще, кроме А.Л. ...» Ждать пришлось почти 5 лет.

Но пора перейти к решению.

Решение. Ключевая идея – посчитать двумя способами площадь, охватываемую ломаной. Но какую именно площадь считать? Для несамопересекающейся ломаной все просто – это площадь ограниченного ею многоугольника. Точнее говоря, ломаная разбивает плоскость на две области – ограниченную и неограниченную, и мы считаем площадь единственной ограниченной области. Но у замкнутой самопересекающейся ломаной ситуация сложнее: среди областей, на кото-

рые она разбивает плоскость, ограниченных несколько. Площадь какой или каких считать? Просто просуммировать площади всех ограниченных областей не годится – такая сумма ведет себя «плохо». Она, например, может меняться «скачком» при малом шевелении ломаной (рис.2). Некоторые области надо от-

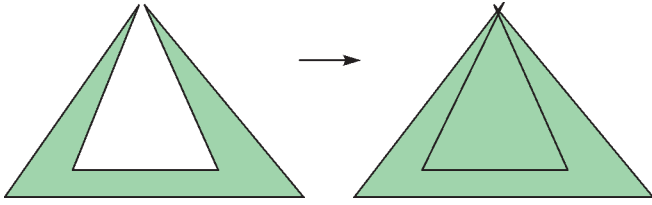


Рис.2

браковать. Вспомним, как мы отличаем точки внутри многоугольника от точек снаружи (на практике такое приходится делать для невыпуклых многоугольников и многоугольников в памяти компьютера). Для наглядности покрасим внутреннюю область в зеленый цвет, а внешнюю, неограниченную – в белый. Тогда выполняется такое свойство: любой путь между точками разного цвета пересекает границу многоугольника *нечетное* число раз, а путь между точками одинакового цвета – *четное*. Отсюда получается простое правило.

Правило раскраски. Выбираем какую-нибудь точку O , заведомо лежащую во внешней области; любую другую точку A , не лежащую на границе, соединяем путем с O ; если этот путь пересекает границу *четное* число раз, делаем A белой, иначе – зеленой.

(Чтобы не возникало случаев, когда общая точка пути и границы является *касанием*, а не пересечением, достаточно рассматривать пути, которые тоже являются ломаными, и при этом вершины пути не лежат на контуре многоугольника, а вершины многоугольника – на пути.)

Оказывается, по такому же правилу можно раскрасить области, на которые разбивает плоскость самопересекающаяся ломаная. Оговоримся только, что мы не рассматриваем ломаные, которые по какому-нибудь отрезку ненулевой длины проходят более одного раза.

Лемма о раскраске. Замкнутая ломаная делит плоскость на области, из которых не ограничена ровно одна. Тогда все области можно раскрасить в зеленый и белый цвета так, чтобы неограниченная область была белой и у областей одинакового цвета не было общих отрезков границы (рис.3).

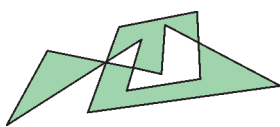


Рис.3

Набросок доказательства леммы приведен в конце статьи. Пока же отметим, что каждая из зеленых областей будет, очевидно, многоугольником. У этих многоугольников нет общих отрезков сторон, они могут соприкасаться только в вершинах. Хотя бы одна зеленая область есть, поэтому сумма площадей зеленых многоугольников положительна и конечна. Нам понадобится еще один способ считать эту площадь: через сумму ориентированных площадей.

Определение. Пусть дана замкнутая несамопересекающаяся ломаная и зафиксирован порядок обхода ее вершин. Охватываемая ею ориентированная площадь по модулю равна площади ограниченного ею многоугольника, но может быть и отрицательной. А именно, выбирается знак плюс, если обход выполнен против часовой стрелки, и минус – если по часовой стрелке.

Будем обозначать обычную площадь P , а ориентированную S . Заметим, что ориентированная площадь меняет знак при смене порядка обхода на противоположный. Для ориентированной площади выполнена замечательная формула.

Формула ориентированной площади. Пусть $ABC\dots YZ$ – замкнутая несамопересекающаяся ломаная, а O – произвольная точка. Тогда

$$S_{ABC\dots YZ} = S_{OAB} + S_{OBC} + \dots + S_{OYZ} + S_{OZA}.$$

Суть формулы станет яснее, если мы ее докажем для примера, приведенного на рисунке 4:

$$\begin{aligned} S_{ABCDE} &= P_{ABCDE} = P_{AODE} - P_{AODCB} = \\ &= (P_{ODE} + P_{OEA}) - (P_{OAB} + P_{OBC} + P_{OCD}) = \\ &= S_{ODE} + S_{OEA} + S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OCD}. \end{aligned}$$

Последние три слагаемых поменяли знак при замене P на S , поскольку в них обход треугольников совершается по часовой стрелке.

Набросок доказательства формулы приведен в конце статьи. А мы вернемся к задаче.

Предположим, что существует ломаная, удовлетворяющая всем условиям нашей задачи. Каждое звено ломаной разбито точкой пересечения на два равных отрезка. Каждый такой отрезок служит стороной одной из зеленых областей. Так как эти области – многоугольники, то каждую из них можно обойти против часовой стрелки. Тем самым мы зададим направление на каждом отрезке. Из условия, что в каждой точке самопересечения пересекаются ровно два звена, и правила раскраски областей следует, что два отрезка одного звена всегда противоположно направлены (рис.5).

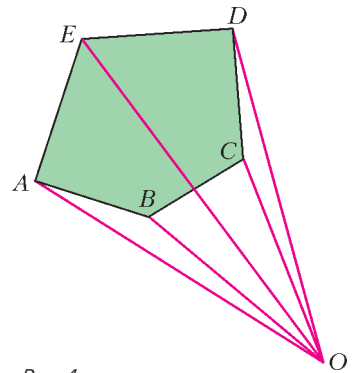


Рис.4

Выберем произвольную точку O , не лежащую ни на звеньях ломаной, ни на их продолжениях, и сосчитаем сумму ориентированных площадей

$$S = S_{OAM} + S_{OBM} + S_{OME} + S_{OMF} + \dots$$

Если сгруппировать слагаемые по зеленым областям, то мы получим сумму ориентированных площадей этих областей. А так как все области обходятся против

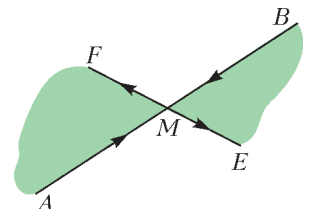


Рис.5

часовой стрелки, то все эти площади положительны, и сумма S тоже положительна. Сгруппируем теперь слагаемые в пары по звеньям. Ясно, что площади треугольников OAM и OBM равны ввиду равенства сторон AM и BM и совпадения опущенных на них высот треугольников. Но обходятся треугольники OAM и OBM по-разному: один против, а другой по часовой стрелке. Поэтому их ориентированные площади S_{OAM} и S_{OBM} противоположны и в сумме дают 0. Значит, и $S = 0$. Противоречие. Значит, искомой ломаной не существует.

Задача решена. Но в процессе ее передачи из уст в уста возникла еще одна задача. Частенько, формулируя, забывали про условие о пересечении ровно двух звеньев в каждой точке. Получалась такая задача:

На плоскости нарисована замкнутая самопересекающаяся ломаная. Она пересекает каждое свое звено ровно в одной точке. Может ли каждая точка самопересечения делить все пересекающиеся в ней звенья пополам? (Нет самопересечений в вершинах и нет звеньев с общим отрезком.)

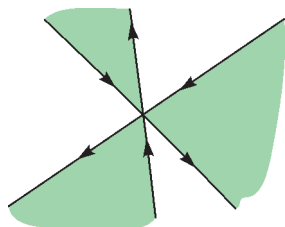
В общем-то, она легче исходной, но и ее решил только А.Л., и то после решения исходной задачи.

Давайте посмотрим, насколько существенно мы использовали отброшенное условие.

Нетрудно заметить, что доказательство можно повторить дословно, если считать, что в каждой точке самопересечения пересекается четное число звеньев,

даже если оно разное в разных точках. Сохраняется и зелено-белая раскраска, и противоположное направление отрезков звеньев. А вот если допустить пересечение трех звеньев, то отрезки звеньев будут направлены в одну сторону (рис.6). Но мало того, что доказательство не проходит.

Рис.6



У задачи и ответ противоположный!

Оказывается, пример ломаной с таким условием есть (рис.7). Зная запрет, построить пример можно так. В-первых, упростим задачу: будем строить незамкнутую ломаную. Идея в том, что если концы такой ломаной

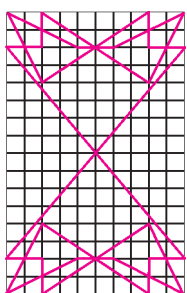


Рис.7

окажутся в неограниченной области, а точнее – в вершинах выпуклой оболочки ломаной, то из нескольких таких ломаных можно будет собрать и замкнутую ломаную. Во-вторых, начнем построение с узкого места. А именно, мы знаем, что в примере обязательно должно быть нечетное число звеньев с общей серединой. Для простоты начнем со всего лишь трех отрезков с общей серединой O . Пovoзвившись, удастся соединить два конца участком из двух звеньев, а из третьего конца провести через середины участков ломаную из двух звеньев так, чтобы свободный конец оказался вне ограниченных участков. Для трех других концов исходных отрезков поступим аналогично. Получилась ломаная из 11 зве-

ньев. Размещая концы таких ломаных в последовательных вершинах шестиугольника, можно получить искомый пример замкнутой ломаной из 66 звеньев. Однако на рисунке 7 приведен более экономный пример. В нем два экземпляра 11-звенной ломаной расположены центрально симметрично, а их концы соединены двумя дополнительными звеньями крест-накрест.

Можно было сэкономить еще 4 звена, отказавшись от симметрии при построении незамкнутой ломаной: тогда для оставшихся трех концов хватило бы трех дополнительных звеньев, и незамкнутая ломаная получилась бы 9-звенной, а замкнутая – 20-звенной! Кстати, остается открытым вопрос о примере с минимальным числом звеньев.

Напоследок давайте все-таки докажем лемму и формулу.

Лемма о раскраске: набросок доказательства. Назовем особыми точками вершины ломаной и ее точки самопересечения. Особые точки разбивают ломаную на отрезки, при этом из любой особой точки выходит четное число отрезков.

Выберем направление луча, не параллельное ни одному из звеньев ломаной. Цвет произвольной точки A , не лежащей на ломаной, будем определять так. Выпустим из A луч в выбранном нами направлении. Повернем плоскость, чтобы луч стал вертикальным.

Пусть луч не прошел через особую точку. Если луч пересек границу нечетное число раз, красим точку A в зеленый цвет, иначе – в белый.

Пусть луч из точки A прошел через одну или несколько особых точек. Достаточно рассмотреть одну из них, для нескольких точек рассуждение такое же. Итак, M – особая точка на луче. Рассмотрим выходящие из M отрезки. Они не лежат на луче, и всего их четное число, поэтому одинаковы и четности числа отрезков справа и слева от луча. Сместим луч чуть вправо или чуть влево. Вне окрестности M число пересечений луча с границей не изменилось. А в окрестности M добавились пересечения со всеми выходящими из M вправо или влево отрезками. Однако четность числа пересечений при этом не изменилась. Согласно этой четности и покрасим A .

Теперь уже ясно, что двигая A внутри одной области, мы покрасим все ее точки в один цвет, а при переходе через границу цвет A сменится.

Формула ориентированной площади: набросок доказательства. Докажем сначала формулу для треугольника. Доказательство для случая, когда точка O лежит вне треугольника, ничем не отличается от рассмотренного выше доказательства для пятиугольника $ABCDE$. А в случае, если точка O лежит внутри треугольника ABC , этот треугольник разбивается на треугольники OAB , OBC , OCA , и его площадь равна сумме их площадей. А поскольку при этом указанное направление обхода этих треугольников такое же, как и направление обхода ABC , то совпадают и знаки при переходе к ориентированным площадям, т.е. равенство сохраняется.

Разобьем теперь наш многоугольник непересекающимися диагоналями на треугольники (рис.8). Для каж-

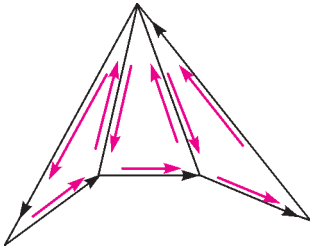


Рис.8

дого треугольника зафиксируем его обход в том же направлении, что и обход исходного многоугольника. Тогда ориентированная площадь многоугольника равна сумме ориентированных площадей треугольников. Зафиксируем точку O и запишем ориентированную площадь каждого треугольника по формуле как сумму трех слагаемых. Эти слагаемые соответствуют красным стрелкам на рисунке: по одному для каждой стороны многоугольника и по два для каждой проведенной диагонали. Нетрудно видеть, что стрелки соответствуют направлениям обхода треугольников и что каждая диагональ проходит дважды в разных направлениях. Слагаемые, соответствующие одной диагонали, взаимно уничтожаются: $S_{OAB} + S_{OBA} = 0$, так как треугольник один и тот же, а направления обхода противоположны. Остается только сумма слагаемых, соответствующих сторонам. Но

эти стороны в треугольниках проходятся в том же направлении, что и в многоугольнике, поэтому мы получаем в точности сумму из формулы.

Замечание. Мы использовали не слишком очевидный факт, что любой многоугольник (в том числе невыпуклый) можно непересекающимися диагоналями разбить на треугольники. На самом деле для доказательства разбиение именно диагоналями несущественно, подойдет *любое* разбиение на треугольники. Сначала проведем параллельные прямые через все вершины. Многоугольник разобьется на трапеции и треугольники. А теперь разобьем каждую трапецию диагональю на два треугольника.

Задачи для самостоятельного решения

1 (А.Шаповалов, Турнир имени А.П.Савина, 1999). Может ли замкнутая ломаная пересекать каждое свое звено ровно один раз, причем под прямым углом?

2 (А.Шаповалов, Московская устная олимпиада по геометрии, 2004). Существует ли в пространстве замкнутая самопересекающаяся ломаная, которая пересекает каждое свое звено ровно один раз, причем в его середине?

НАШИ ОБЛОЖКИ

Портрет гения

(см. 3-ю страницу обложки)

С шахматами Магнус Карлсен познакомился в пять с половиной лет, но играл только со старшей сестрой Хеллен. По-настоящему увлекся в восемь, регулярно участвовал в детских турнирах, то и дело заглядывал в шахматные книги, и успехи росли на глазах. В девять он уже показывал выдающиеся результаты, и к нему приклеились два слова – малыш и вундеркинд. Ну а в 13 стало ясно, что в шахматном мире появился новый гений.

Внешне Магнус выглядит как типичный подросток и, хотя он лучший в самом интеллектуальном виде спорта, не строит из себя большого умника. Наоборот, шутит и иронизирует по этому поводу: «Шахматисту не обязательно быть интеллектуалом. Возьмем, к примеру, английского гроссмейстера и математика, доктора Джона Нанна: он не стал чемпионом, потому что для этого слишком умен. Я же, как видите, нормальный парень».

Держится Магнус просто, у него непосредственная детская улыбка, но во время игры взгляд бывает тяжелым. Ходит с пакетом, в котором лежит бутылка апельсинового сока; общителен, искренен и откровенен, хотя ответы его порой слишком лаконичны. В интервью не отказывает, но все зависит от настроения. Как и все молодые люди, много времени проводит в интернете.

Магнус любит играть в футбол со сверстниками или с тремя своими сестрами, во время партии на глазах у всех может сделать «производственную гимнастику» или внезапно уронить голову, погрузившись в медитацию. Зимой Магнус гоняет на лыжах (национальный вид спорта в Норвегии), ему нравятся большой теннис, сквош и баскетбол. Не избегает веселых компаний, но не скучает и в одиночестве.

Кстати, еще раз о футболе. Магнус Карлсен – преданный болельщик «Реала», и по случаю 23-летия Магнуса прези-



дент клуба Флорентино Перес преподнес ему ценный подарок: прислал письменное приглашение посетить Мадрид 30 ноября, как раз в день его рождения, и на знаменитом стадионе «Сантьяго Бернабеу» произвести первый удар по мячу в матче «Реал» – «Вальядолид». И, конечно, неделей раньше Перес, большой поклонник шахмат, поздравил Карлсена с завоеванием короны...

У Карлсена широкий диапазон: с одной стороны, его называют шахматным Моцартом, а с другой, сравнивают с Джастином Бибером, канадским поп-певцом, кумиром тинейджеров. Гроссмейстер охотно рекламирует модную одежду фирм «Arctic» и «Simonsen law» – своих постоянных спонсоров, имеет выгодные контракты, правда пока уступает здесь Марии Шараповой.

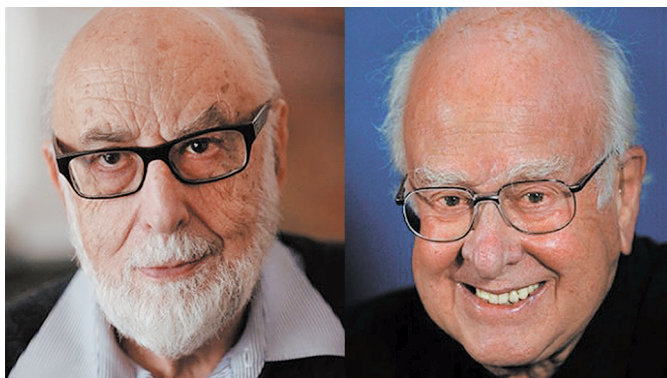
Ну а читателям, далеким от шахмат, советуем не перепутать нашего героя, гениального игрока, с Карлсоном, «который живет на крыше». Магнус Карлсен теперь живет на вершине шахматного Олимпа!

Е.Гук

Премия теоретикам за эксперимент

Л. БЕЛОПУХОВ

ВОСЬМОГО ОКТЯБРЯ 2013 ГОДА НОБЕЛЕВСКИЙ КОМИТЕТ объявил о присуждении Нобелевской премии по физике профессору Брюссельского свободного университета Франсуа Энглеру и профессору Эдинбургского университета Питеру Хиггсу «за теоретическое открытие механизма, который помог нашему пониманию происхождения массы субатомных частиц и который недавно был подтвержден



Франсуа Энглер и Питер Хиггс

открытием предсказанной фундаментальной частицы экспериментами ATLAS и CMS на Большом адронном коллайдере в ЦЕРНе».

Формулировка необычно длинная – 31 слово, если же раскрыть три аббревиатуры, то даже 43 слова, хотя средняя длина таких формулировок (по физике) – 11 слов, а есть даже и формулировка из 3 слов: «за открытие нейтрона».

Еще одна особенность нынешней премии в том, что она присуждена не экспериментаторам, а теоретикам, которые 49 (!) лет назад разработали и опубликовали свои работы. Справедливости ради, нужно отметить, что в те годы не только Энглер и Хиггс выдвинули новую гипотезу. Еще несколько физиков-теоретиков работали в этом же направлении (и почти все независимо друг от друга). Однако Нобелевская премия присуждается только тем ученым, которые дожили до момента обсуждения о награждении. (Единственное исключение – премия 2001 года по физиологии или медицине, присужденная Ральфу Стаймену, о кончине которого за неделю до обсуждения Нобелевский комитет не успел узнать и решение не было отменено.)

Работы Энглера, Хиггса и других ученых в том, уже далеко по меркам развития науки, времени казались полуфантастическими. Физические журналы некоторое время отказывались от их публикации. Но примерно через 15 лет физикам-теоретикам без этих работ стало как-то неуютно, и они с нетерпением стали ждать экспериментального подтверждения теоретического предсказания. По различным, не

очень существенным, причинам это предсказание получило условное название «бозона Хиггса». Долгое время это словосочетание знали только те, кто занимался физикой частиц. Но несколько лет назад о бозоне Хиггса узнали очень многие. Это случилось, когда был запущен Большой адронный коллайдер (БАК), одной из главных целей работы которого было объявлено обнаружение этой гипотетической частицы. В средствах массовой информации, используя неосторожные высказывания некоторых ученых, бозон Хиггса стали называть дьявольской частицей, божественной частицей и даже частицей Бога.

Так что же это за таинственный объект? Журнал «Квант» рассказывал о нем в прекрасной статье академика В.Рубакова «К открытию бозона Хиггса» («Квант» №5–6 за 2012 г.). В этой статье научная точность удачно сочетается с популярностью изложения.

Остановимся все же на двух моментах – на расшифровке значения теоретического открытия и на его подтверждении.

К концу прошлого века более чем 50-летняя история физики частиц ознаменовалась созданием теории «почти всего», как писали сами физики-теоретики, ее создавшие. Были выделены и классифицированы самые основные (фундаментальные) «кирпичики», из которых состоят атомные ядра, атомы, молекулы, вещества, биологические объекты, люди, планеты, звезды и галактики, а также определены законы взаимодействия между этими «кирпичиками». Теория получила название Стандартной модели. Возможно, что происхождение такого («неуклюжего», как пишет В.Рубаков) названия связано с тем, что она, как и технологические стандарты, включает все ингредиенты, необходимые для создания объекта, и все выполняемые производственные операции. В нашем случае ингредиенты – это «кирпичики», производственные операции – законы взаимодействия, а объект – вся Вселенная.

Ингредиенты Стандартной модели – это 6 кварков, 6 лептонов и 5 частиц-переносчиков взаимодействий кварков и лептонов между собой.¹ Может возникнуть недоуменный вопрос – а где наши привычные протоны, нейтроны и электроны? Все они есть в Стандартной модели: и протон, и нейтрон состоит из трех кварков двух видов, а электрон – один из лептонов. Другие лептоны в огромном количестве «гуляют» по всей Вселенной. Это – нейтрино (и антинейтрино), которые очень редко взаимодействуют с другими частицами, но зато несут ценнейшую информацию о процессах внутри звезд, где они рождаются. А кварки в подходящих условиях, группируясь, могут создавать не только протоны и нейтроны, но и множество (несколько сотен) различных короткоживущих частиц. Бытовал даже термин «зоопарк» частиц. С появлением кварковых представлений все они оказались не фундаментальными, не основными «кирпичиками» мира. Пять частиц-переносчиков иногда называют «клеями». Одна из них так прямо и называется – глюон (от англ. glue – клей). Самый известный «клей» – это фотон. На его примере понятно, что о частицах-переносчиках можно говорить как о квантах полей. Поле – это объект, содержащий возможные (виртуальные) частицы-переносчики. При каком-либо воздействии на поле такая частица как бы рождается из него, становясь реальной частицей. Так, например, происходит процесс появления фотона при переходе атомного электрона из одного энергетического состояния в другое.

¹ У всех кварков и лептонов могут существовать античастицы, отличающиеся противоположным знаком заряда – электрического, барионного или лептонного.

Есть и иная терминология, связанная с полями и виртуальными частицами. При рождении из поля квантов-переносчиков энергия поля уменьшается. Нулевой она не может быть из-за квантового соотношения неопределенностей. Состояние с минимальной энергией поля называют физическим вакуумом. Видов этого вакуума столько, сколько есть видов «клеев».

Отметим, что все «клеи» являются бозонами, а все остальные частицы – фермионы. Что это означает? Формальное различие связано с величиной внутренней квантовой характеристики – так называемого спина (от англ. spin – вертеться, кружиться). Частицы имеют собственное вращательное движение. Поэтому, например, все электрически заряженные частицы – это маленькие магнитики. Интенсивность этого вращения не зависит ни от каких внешних причин, это собственная характеристика частицы. Момент импульса этого вращения (его часто называют угловым моментом), а точнее – проекция этого момента на направление внешнего воздействия, как и другие характеристики частицы, фиксирован (квантован). Он равен $s\hbar$, где \hbar – постоянная Планка, а s – так называемое спиновое квантовое число. У всех кварков и лептонов $s = 1/2$, а у частиц-переносчиков $s = 1$.

Такое различие в спинах приводит к кардинальному различию в поведении частиц. Когда некоторое количество кварков или лептонов находится в одном квантовом ансамбле («коллективе»), подчиняясь воздействию определенного поля, например электрического, они не могут быть совершенно одинаковыми. Каждая частица должна иметь свою характеристику вероятностного поведения – волновую функцию или набор квантовых чисел. Вероятностная функция для энергии частиц называется распределением Ферми–Дирака, и таким частицам присвоено наименование фермионов. Образно можно сказать, что фермионы – «индивидуалисты». Электроны принадлежат к фермионам, и именно поэтому электроны одного атома или одной молекулы должны быть различными (иметь разные наборы квантовых чисел). В конечном счете это приводит к огромному разнообразию молекул, веществ и биологических объектов. А вот частицы-переносчики в коллективе могут быть совершенно одинаковыми (например, фотоны в лазерном луче). Они – «коллективисты». Их вероятностная энергетическая характеристика имеет несколько другой вид, чем у фермионов, и называется распределением Бозе–Эйнштейна. Таким частицам присвоили наименование бозонов. К сожалению, невозможно «на пальцах», т.е. не прибегая к математическому аппарату квантовой науки, объяснить, почему такая, казалось бы, незначительная разница в величине собственного углового момента частицы приводит к принципиальному различию в поведении частиц.

Важную роль в Стандартной модели играют принципы симметрии, понимаемой гораздо более широко, чем привычные нам зеркальная симметрия или симметрия кристаллических форм. Суть этих симметрий – повторяемость (неизменность) «картинки» при определенном геометрическом преобразовании. В физике понятие симметрии распространяется на любые преобразования (координат, времени, внутренних характеристик объекта). Законы физики не меняют своей сути при этих преобразованиях, а соответствующие уравнения не меняют своего вида.

Оказалось, что каждому виду симметрии соответствует некоторый закон сохранения (Эмми Нётер, 1918 г.) Например, пространственным (координатным) симметриям соответствуют закон сохранения импульса и закон сохранения момента импульса, временной симметрии – закон сохранения механической энергии. Но есть и другие законы сохранения – например, законы сохранения электрического, бари-

онного или лептонного заряда. Особые симметрии, связанные с такими внутренними характеристиками квантового объекта, получили специальное название – «калибровочная инвариантность». Это особый теоретический прием, пригодный для всех видов полей. Калибровочная инвариантность позволяет предсказывать и рассчитывать свойства элементарных частиц – массу, средние времена их жизни, варианты распадов и др.

Все предсказанные теорией свойства были подтверждены в экспериментах на ускорителях, все предсказанные частицы были открыты. Но у Стандартной модели имелось некоторое затруднение. В квантовой электродинамике, т.е. в разделе Стандартной модели, где рассматриваются электромагнитные взаимодействия, экспериментальный факт отсутствия массы у фотонов – переносчиков этого взаимодействия – имел теоретическое обоснование. Оно было тесно связано с внутренней симметрией электродинамики, которая приводит к сохранению электрического заряда. Спин (спиновое число) фотона при этом должен быть равен 1. Аналогичная картина наблюдается и в квантовой хромодинамике – той части модели, которая имеет дело с сильными взаимодействиями кварков. Как выше упоминалось, частицы-переносчики этого взаимодействия называются глюонами. Они, как и фотоны, не имеют массы.

Но хуже обстояло дело со слабыми взаимодействиями, точнее с электрослабыми, поскольку создание Стандартной модели обычно связывают с разработкой объединенной теории электрических и слабых взаимодействий (Нобелевская премия 1979 г. Ш.Глэшоу, А.Саламу и С.Вайнбергу). Для переносчиков этих взаимодействий не придумали специальных терминов. Их называют, несколько по-казенному, векторными W^\pm -бозонами и Z -бозонами. По всем канонам калибровочной инвариантности, имея спин, равный 1, они должны были быть безмассовыми. Но эксперименты (Нобелевская премия 1984 г. К.Руббиня и С. ван дер Меру) неопровержимо показали наличие масс у этих бозонов. И не маленьких по меркам микромира массы – а в 80–90 раз больше, чем у протона. Это означает, что какие-то симметрии в мире элементарных частиц могут нарушаться.

И тогда создатели Стандартной модели вспомнили гипотезу Энглера, Хиггса и других физиков об особом поле, которое может нарушить одну из симметрий калибровочной инвариантности так, что частицы во взаимодействии с ним должны получить массу. Это поле не должно иметь выделенных направлений, т.е. должно быть скалярным, а не векторным. А это, в свою очередь, означает, что квант этого поля – бозон Хиггса – должен не иметь спина. В теории были предсказаны и другие свойства бозона Хиггса. Для полного торжества Стандартной модели оставалось только экспериментально зафиксировать наличие этого бозона в природе и подтвердить теоретические предсказания его свойств.

Но это оказалось непростой задачей. Теория предсказывала столь большую массу бозона Хиггса, что для его обнаружения не хватало мощности существовавших ускорителей. Часть физиков предлагали даже отказаться от Стандартной модели и искать новые теории частиц. Вот тогда и объявили бозон Хиггса божественной частицей, которую невозможно познать. Но в научном мире победила вера в Стандартную модель, ученые убедили правительства нескольких стран в том, что не надо жалеть денег на строительство новых ускорителей. Поскольку это были немалые деньги, то первыми преуспели США. На новом ускорителе, протон-антипротонном коллайдере, запущенном в 1983 году и рассчитанном на энергию 1000 ГэВ, искали бозон Хиггса. В 2002 году даже показалось, что его обнаружили. Но тщательная проверка обнаружила, что это не так.

Старый Свет (Европа) решил обогнать Новый Свет (США). Европейские страны объединили свои усилия, был запроектирован и построен БАК – Большой адронный коллайдер, значительно превосходящий по своей мощности американский ускоритель. И хотя окончательно на проектную величину энергии частиц БАК выйдет только к 2015 году, уже сейчас, проработав немногим больше года на половинной мощности, БАК дал возможность получить целый ряд важных результатов, главным из которых и является доказательство существования бозона Хиггса.



Участок Большого адронного коллайдера в ЦЕРНе

Четвертого июля 2012 года в ЦЕРНе было объявлено об открытии бозона Хиггса. Масса бозона оказалась (с надежностью 99%) равной $125,3 \pm 0,6$ ГэВ, спиновое число бозона равно нулю, время жизни порядка $1,6 \cdot 10^{-22}$ с, различные пути распада на пары и четверки частиц и античастиц – все эти и другие характеристики полностью подтвердили теоретические предсказания. Отныне все сомнения в справедливости Стандартной модели отпали. Она заняла свое место теории, лежащей в основе современной физики.

А что же дальше? А дальше – целый ряд задач, решение которых, возможно, переведет физику на более высокую ступень познания. Среди близких задач – уточнение Стандартной модели, получение новых сведений о кварках и глюонах и, вследствие этого, о первых мгновениях существования Вселенной. Но есть задачи и еще более важные – выяснить, что такое темная материя и темная энергия, существуют ли суперматерия и суперчастицы, каково состояние материи в черных дырах. Много нового ожидает наука от работы БАКа в ближайшие 10–20 лет. Продолжится и благотворное соревнование Старого и Нового Света. В США запроектировано строительство электронно-позитронного коллайдера, по своим возможностям на порядок превышающего БАК. Недаром свою статью академик В.Рубаков год назад закончил словами: «Так что следите за новостями!»

В заключение остановимся на некоторых характеристиках БАКа – настоящего чуда света XXI столетия.

На границе Франции и Швейцарии в толще горных пород на глубине порядка 120 м от поверхности земли расположен туннель почти круговой формы длиной 26,7 км с диаметром основного сечения 12 м. Кроме главного туннеля имеется еще ряд колец меньшего размера, где протоны постепенно набирают энергию на участках с разгоняющим электрическим полем и разделяются на два встречных пучка. В главном туннеле по двум трубам два потока протонов движутся в противоположных направлениях. Скорость движения протонов почти равна скорости света. При такой

скорости за одну секунду протоны 10000 раз описывают окружность 27-километрового кольца.

Суть метода встречных пучков (коллайдера) заключается в том, что при столкновении относительная энергия увеличивается не в 2 раза, как это происходит при малых энергиях, а в несколько сотен раз. Это и нарушает спокойствие (симметрию) вакуумных полей, в результате чего появляются (рождаются) новые частицы. Каждую секунду в месте столкновения протонов происходит около миллиарда таких событий. Часть из них надежно отождествлена с рождениями бозонов Хиггса.

В туннелях поддерживается очень сильное разрежение. Остаточное давление не превышает 10^{-8} Па, что в сто миллиардов раз меньше атмосферного давления. При этом в 1 см^3 еще остается 200 миллионов молекул, но их воздействием на летящие протоны уже можно пренебречь. Для поддержания необходимого разрежения должна непрерывно работать целая «армия» откачивающих насосов.

Но главной задачей, конечно, является обеспечение кругового движения протонов. Это может сделать только магнитное поле. При огромных скоростях протонов даже для такой большой окружности индукция магнитного поля должна составлять 15 Тл. На трассе полета расположены 1624 соленоида, создающих главное магнитное поле, обеспечивающее круговую траекторию частиц, а также поля для коррекции и фокусировки протонов. Протоны летят непрерывным потоком, а в виде сгустков, в каждом из которых содержится 100 миллионов частиц. Такой сгусток имеет вид иголки длиной около 5 см и толщиной сотые доли миллиметра. В отдельных точках траектории продолжается ускорение сгустков быстропеременным электрическим полем. На трассе полета одновременно находятся 2808 сгустков.

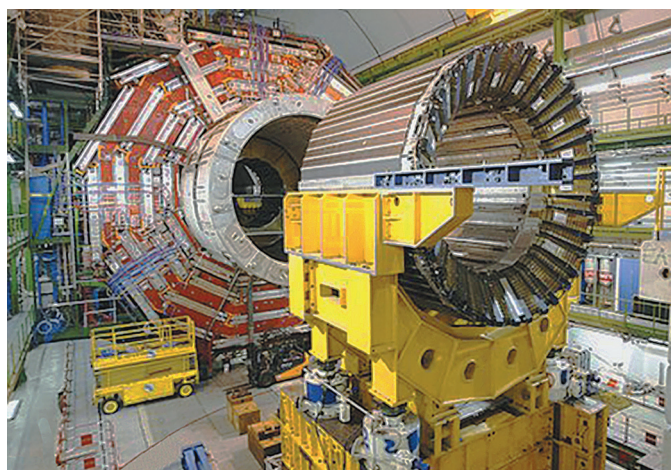
Для того чтобы создать магнитное поле необходимой интенсивности, ток в обмотках соленоидов должен иметь величину 11000 А. При таком токе в обычных условиях любой проводник почти мгновенно расплавляется и испаряется. Чтобы этого не происходило, сопротивление обмоток соленоидов должно быть не просто маленьким, а строго нулевым, т.е. обмотки должны находиться в сверхпроводящем состоянии. Это может быть только при очень низких температурах. Поэтому температуры обмоток и всего туннеля не превышают 1,9 К. Поддержание такой температуры достигается трехступенчатым охлаждением – сначала жидким аргоном, потом жидким азотом и, наконец, жидким гелием. Поскольку тепло Земли стремится проникнуть в туннель, нужно по охлаждающим цилиндрам все время прокачивать жидкие газы-охладители. В сутки БАК потребляет 30000 л жидкого азота (несколько большегрузных цистерн) и 3000 л жидкого гелия (цистерна среднего размера).

Немаловажное значение имеет точность подгонки всех металлических деталей конструкции. Она должна не превышать нескольких тысячных долей миллиметра, ибо «место встречи» протонов «изменить нельзя», а встречающиеся иголочки уж очень тоненькие. Интересно, что при этом необходимо учитывать даже такое необычное обстоятельство, как приливная волна в земной коре. В полнолуние амплитуда этой волны там, где находится БАК, составляет 25 см. И хотя приливная волна очень плавная, она немного деформирует туннель, и это нужно учитывать. Требуется непрерывный приборный контроль за трассой полета частиц и ее корректировка.

На трассе полета предусмотрены 4 места встречи протонных пучков, 4 измерительных лаборатории. Каждая из них – это огромная (размером с многоэтажный дом) «пе-

щера», набитая электромагнитами и детекторами частиц. Детекторами являются, главным образом, искусственно выращенные прозрачные монокристаллы, словно вспыхивающие при проходе сквозь них быстрой частицы (эффект Вавилова–Черенкова). Вспышка улавливается фотоумножителем, преобразуясь в нем в электронный сигнал. Сигнал поступает в электронную схему и становится цифровой информацией. Информация по оптоволоконным кабелям поступает в компьютерный цех. Иначе и не назовешь это помещение, где находится несколько тысяч многогигабайтных процессоров.

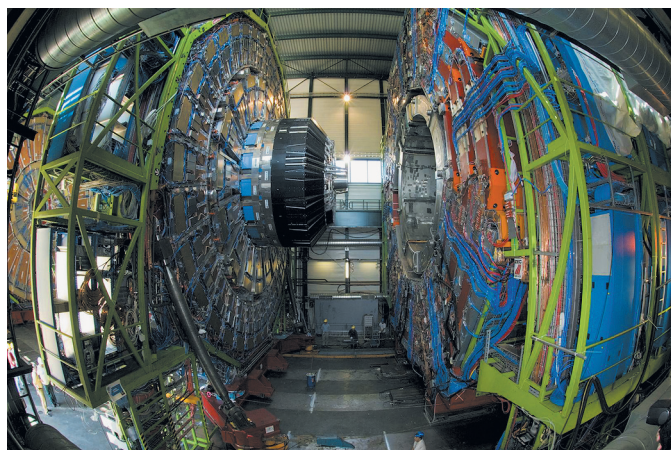
Первой задачей компьютеров является отсев информации об известных и изученных событиях. И только отжатая информация (меньше 0,001 доли от поступившей) передается дальше. По специальной информационной международной сети информация передается в лаборатории 25 стран мира. Для страховки передача этой информации производится не только обычным путем через космические



Лаборатория ATLAS

сети передачи, но и по оптоволоконным сетям, специально проложенным для этой цели, в том числе и по дну морей и океанов.

В формулировке Нобелевской премии отмечены две БАКовские лаборатории – ATLAS и CMS.



CMS-лаборатория

Главные результаты по бозону Хиггса были получены именно на «приборе» ATLAS (от англ. **A** Toroidal LHC

Apparatu**S**). Он представляет собой цилиндрическую пещеру длиной 44 м и диаметром 25 м. Внутри такой пещеры может свободно разместиться хороший пятиэтажный дом. Огромные сверхпроводящие соленоиды искривляют пути разлета образующихся при столкновении частиц и направляют их к датчикам, регистрирующим энергию частиц. Масса магнитов и других устройств составляет 7000 т. Лабораторию проектировали, участвовали в ее сооружении и теперь наблюдают за ее работой 2900 ученых и инженеров из 37 стран мира, в том числе 200 ученых из России и стран СНГ. Это – основное участие России в сооружении и работе БАКа.²

Вторая лаборатория БАКа, принимавшая участие в экспериментах по бозону Хиггса, сокращенно называется CMS (от англ. Compact Muon Solenoid). В принципе эта лаборатория похожа на ATLAS. Она немного меньше, «компактнее», хотя тоже имеет внушительные размеры – цилиндр длиной 22 м и диаметром 15 м. Магнитное поле этого соленоида имеет величину 4 Тл. Лаборатория предназначена для идентификации многих частиц, в том числе и бозонов Хиггса, точнее, продуктов его распада – мюонов и антимюонов, поэтому слово «мюон» и входит в ее название. Для этой лаборатории харьковский завод в Украине выращивал кристаллические детекторы (иодиды натрия и цезия, активированные таллием), а московский завод контролировал их качество.

Что же сейчас происходит на БАКе? В феврале 2013 года он остановлен для того, чтобы произвести подготовительные работы для запуска на полную энергию частиц – 14000 ГэВ. Более сильные магнитные поля, необходимые для удержания на траектории ускоренных частиц, требуют большей надежности всех механических соединений. Сейчас на всем 27-километровом кольце работают сотни инженеров и техников, устанавливающих новые крепежные детали электромагнитов. Работа продлится еще год. По плану включение БАКа на полную мощность должно произойти в конце 2014 года. А во всех научных учреждениях, куда поступили результаты уже проведенных экспериментов, идет работа по обработке этих результатов.

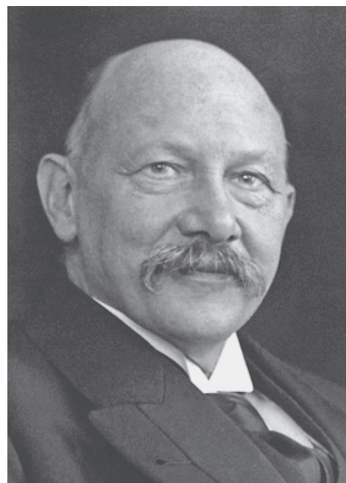
Огромные заслуги создателей БАКа не остались без вознаграждения. Фонд российского миллиардера Юрия Мильмана «Премии по фундаментальной физике» еще в марте 2013 года наградил этой премией (три миллиона евро) коллектив из 7 человек, руководителей проекта. Поэтому Нобелевскому комитету осталось отметить только теоретиков-физиков.

² Отметим, что в число участников проекта Большого адронного коллайдера Россия не вошла. В 90-е годы прошлого века, когда развернулись основные работы, нашей стране было не до того. С большим трудом Объединенный институт ядерных исследований в Дубне смог тогда получить небольшие средства для поездки нескольких ученых в ЦЕРН. Участниками проекта являются 20 европейских стран. Главными спонсорами проекта (2/3 от общей стоимости, т.е. около 7 миллиардов евро) являются Германия, Франция, Великобритания, Италия и Испания.

Открытие явления сверхпроводимости и предшествующие ему события

А.ВАРЛАМОВ

ВОСЬМОГО АПРЕЛЯ 1911 ГОДА В РУКОВОДИМОЙ ПРОФЕССОРОМ Хейке Камерлинг-Оннесом криогенной лаборатории Лейденского университета (Нидерланды) было сделано открытие, определившее направление будущих исследований тысяч ученых всего мира на последовавшее столетие. Измерение сопротивления проволоочки, сделанной из чистой



Хейке Камерлинг-Оннес

ртути, показало его резкое падение и полное исчезновение при температурах, близких к точке кипения жидкого гелия, т.е. к 4,2 К. Это явление Камерлинг-Оннес назвал сверхпроводимостью. Для того чтобы понять, почему явление сверхпроводимости было открыто в начале двадцатого века и именно в лаборатории Камерлинг-Оннеса, необходимо вернуться в конец века предыдущего и окунуться в атмосферу того времени. Во второй половине девятнадцатого века в Европе бурно развивалось промышленное производство, однако в фундаментальной науке, равно как и в искусстве, имело место ощущение завершенности и исчерпанности существующих парадигм. В физике уже были созданы совершенная классическая механика и термодинамика, оптика и теория электромагнетизма. «Наиболее важные фундаментальные законы и явления физической науки уже известны. Эти законы установлены настолько достоверно, что возможность их изменения в связи с новыми открытиями представляется почти невероятной», — заявил американский физик Альберт Майкельсон в 1899 году. «Будущим исследователям, — утверждал он, — остается уточнять полученные результаты в шестом знаке после запятой». Однако очень скоро жизнь показала, насколько он ошибся.

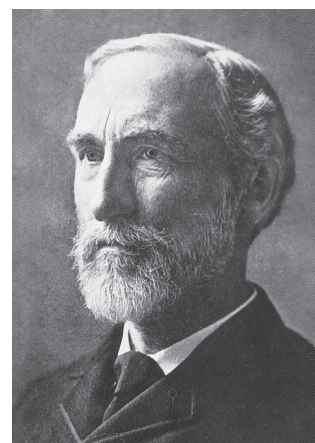
В живописи, скульптуре, архитектуре и музыке классицизм также достиг своего совершенства. Для дальнейшего познания свойств окружающего мира, возможно находящихся за пределами непосредственных человеческих ощущений, а также для передачи тончайших человеческих ощущений художественными методами было необходимо эти парадигмы расширить. Так, в искусстве конца 1860-х — начала 1880-х годов возникает новое направление — импрессионизм,

главной целью которого становится передача мимолетных, изменчивых впечатлений. Импрессионизм основывался на последних открытиях оптики и теории цвета. Наиболее ярко импрессионизм проявился в живописи, где особое внимание уделялось передаче цвета и света. Еще одно новое направление ухода от классицизма в искусстве — это модерн, отличительными особенностями которого являются отказ от прямых линий и углов в пользу более естественных, «природных» линий, интерес к новым технологиям.

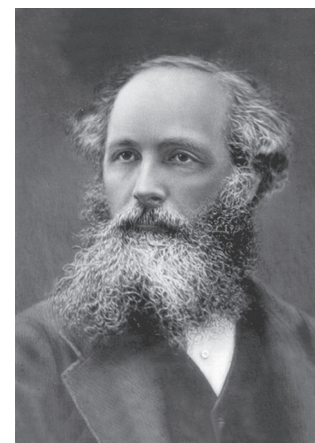
Новые идеи и методы приходят и в физику. Так, в 1870-х годах в работах австрийского физика Людвиг Больцмана, американского математика и физика Джозайи Гиббса и британского ученого Джеймса Клерка Максвелла для описания свойств физических систем, содержащих большое число частиц, движущихся по законам классической механики, формулируется так называемый статистический метод. Он позволяет получить необходимую информацию о свойствах подобных систем без решения огромного числа дифференциальных уравнений классической механики, выписанных для каждой частицы.¹ Добровольный отказ от подробного детерминистического описания в пользу гораздо менее информативного вероятностного позволяет создать новую науку — статистическую физику. В ее рамках, не вдаваясь в ненужные детали, оказывается возможным найти фундаментальные законы, возникающие при росте числа частиц в системе и управляющие поведением газов, жидкостей, твердых тел. Для этого вводятся качественно новые физические величины, например характеризующая степень беспорядка системы энтропия, уточняются ранее введенные феноменологические понятия (температура, энергия). С единых позиций удастся не только понять процессы, происходящие в таких системах, но и сделать важные для практики предсказания. Подчеркнем, что индетерминизм статистической физики, вероятностный харак-



Людвиг Больцман



Джозайя Гиббс



Джеймс Клерк Максвелл

¹Нужно отметить, что физика XXI века, благодаря появлению сверхмощных компьютеров, возвращается к этой отвергнутой идее в форме так называемого метода молекулярной динамики.

тер описания ею свойств систем многих частиц пока является все же свободным выбором ученых, так же как и выбор метода отражения действительности импрессионистами в искусстве.

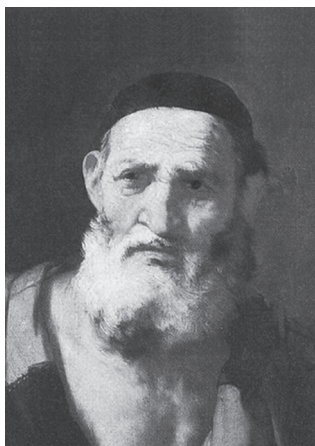
Иной оказывается ситуация при попытке проникнуть в тайны микромира. Впервые об элементарной, неделимой, мельчайшей частице вещества – атоме – писал еще древнегреческий философ Левкипп (V век до н.э.). Согласно Левкиппу, атомы абсолютно плотны, бесконечно разнообразны по форме и размерам и находятся в непрерывном хаотическом движении в пустоте, в процессе которого они сталкиваются друг с другом, образуя своеобразные вихри. Эти вихри служат строительным материалом для образования всех вещей в мире. Ученник Левкиппа Демокрит (около 460–370 гг. до н.э.) настолько активно популяризировал и развивал идеи своего учителя, что через некоторое время уже стало неясно, где проходит граница раздела между их взглядами. Поэтому сегодня часто именно имя Демокрита возникает первым при упоминании атома.

В 1897 году английский физик Джозеф Джон Томсон открывает элементарную частицу, обладающую отрицательным зарядом, – электрон. Это позволяет ему через несколько лет, следуя лорду Кельвину, сформулировать свою модель атома, в которой он предполагает, что «...атомы элементов состоят из нескольких отрицательно заряженных корпускул, заключенных в сферу, имеющую однородно распределенный положительный электрический заряд». Эта модель осталась в истории науки под названием «модель пудинга», но просуществовала недолго. В 1911 году тоже английский физик Эрнест Резерфорд, бомбардируя золотую фольгу альфа-частицами, обнаруживает существование у атома компактного ядра, в котором и сосредоточен весь положительный заряд. Это открытие делает томсоновский «пудинг» достоянием истории физики. Сам же Резерфорд, в свою очередь, предлагает «планетарную» модель атома, в которой отрицательно заряженные электроны вращаются в пустоте вокруг положительного ядра. Беда заключается в том, что, вращаясь по круговым орбитам, заряженные частицы, согласно законом элект-

ромагнетизма, должны излучать энергию и в конце концов упасть на ядро. Для устранения этого парадокса в 1913 году датский физик-теоретик Нильс Бор вводит загадочные постулаты, «освобождающие» электрон от обязанности излучать при вращении по некоторым, им определенным, орбитам, в то время как излучение света (и поглощение) происходит лишь при переходах электронов между ними. Движение по окружностям с промежуточными между им указанными радиусами Бором запрещены. Эти постулаты позволяют объяснить линейчатые спектры, наблюдавшиеся в поглощении различных газов, и даже предсказать новые серии таких спектров, однако смысл их остается загадочным.

Примерно в то же время, когда Дж.Дж.Томсон в Кавендишской лаборатории Кембриджского университета изучает отклонение катодных лучей в электрических и магнитных полях, что вскоре приведет его к гипотезе о существовании материи в состоянии еще более тонкого дробления, чем атомы, немецкие физики поглощены поиском ответа на вопрос, какова связь между температурой, цветовой гаммой и интенсивностью света, излучаемого горячим железным прутом. Позднее она стала называться задачей об излучении абсолютно черного тела. Эта задача кажется тривиальной, однако при всех затраченных усилиях в рамках классических электромагнетизма и термодинамики теоретические выкладки приводили к абсурдным результатам и противоречили имеющимся экспериментальным данным.

Решил эту задачу Макс Планк – профессор Берлинского университета, классический немецкий ученый, педант. Ценой, которую ему пришлось заплатить, стало понятие кванта энергии, которое он ввел в физику для спасения от так называемой ультрафиолетовой катастрофы. «Коротко говоря, то, что я сделал, можно описать только как акт отчаяния», – писал Планк впоследствии. Закон, получивший мрачное название «ультрафиолетовой катастрофы» или «катастрофы Рэля–Джинса», был найден в рамках классической теории электромагнетизма и термодинамики и давал ответ на вопрос о зависимости спектральной плотности электромагнитного излучения нагретого тела от частоты излучаемых волн и от его темпера-



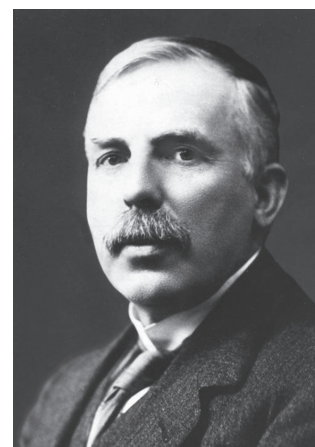
Левкипп



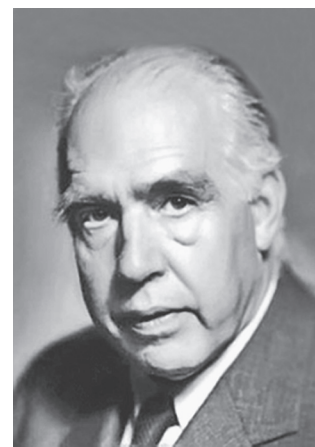
Демокрит



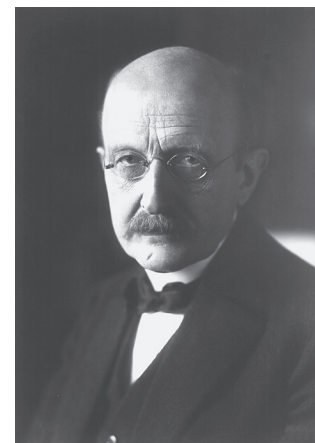
Джозеф Джон Томсон



Эрнест Резерфорд



Нильс Бор



Макс Планк

туры. Справедливость найденного соотношения означала бы невозможность термодинамического равновесия между веществом и излучением, поскольку, согласно ему, вся тепловая энергия должна была бы перейти в энергию излучения коротковолновой области спектра. В частности, это означало бы охлаждение Вселенной до абсолютного нуля температур за счет излучения коротких электромагнитных волн. Планк



Альберт Эйнштейн

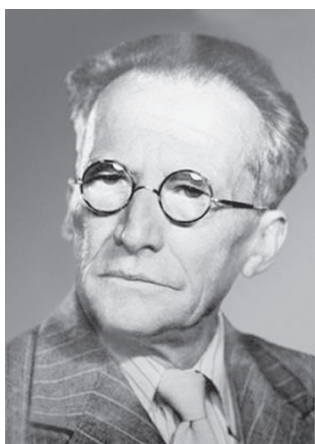
указал на неприменимость понятий классической физики в этой области энергий и, введя необходимое понятие квантования энергии, нашел правильное, внутренне непротиворечивое выражение для спектральной плотности электромагнитного излучения.

Следующий шаг на пути к пониманию дискретности микромира делает Альберт Эйнштейн. В 1905 году он публикует работу с объяснением загадочного до того момента явления фотоэффекта: испускания электронов веществом под действием электромагнитного излучения (в частности, света).

Впервые его наблюдал в 1839 году Александр Беккерель в электролитах, затем его обнаружил в 1873 году Уиллоуби Смит в экспериментах с селеном и в 1887 году – Генрих Герц на цинке. В 1888–1890 годах фотоэффект систематически изучал Александр Столетов. Загадочные свойства фототока – пропорциональность его плотности световому потоку, линейное возрастание максимальной кинетической энергии электронов с частотой и ее независимость от интенсивности света, а также существование для каждого вещества своей красной границы фотоэффекта – все это Эйнштейн объясняет, возвращаясь к старой, отвергнутой Гюйгенсом ньютоновской идее корпускул. Только в предположении, что свет ведет себя как частица, обладающая импульсом и энергией, можно объяснить необходимую концентрацию энергии в объеме, соответствующем электрону в металле, чтобы вырвать его оттуда. Позже, в 1909 году, Эйнштейн публично заявляет, что в будущем исследование излучения позволит обнаружить синтез частиц и волн.



Луи де Бройль



Эрвин Шредингер

Очередной кирпич в строящееся здание квантовой физики закладывает французский физик-теоретик Луи де Бройль: «В 1923 году, после долгих уединенных размышлений и раздумий, я не ожи-

данно подумал, что открытие, сделанное Эйнштейном в 1905 году, надо обобщить, распространив его на все материальные частицы, в первую очередь на электроны». Де Бройль осмелился задать себе простой вопрос: если световые волны могут вести себя как частицы, то почему частицы, такие как электрон, не могут вести себя как волны? Эйнштейн характеризовал его работу как «первый неуверенный шаг по направлению к разгадке одной из самых хитроумных головоломок современной физики».

Наконец, в конце 1926 года австриец Эрвин Шредингер обобщает корпускулярно-волновой дуализм Луи де Бройля на частицы, движущиеся во внешнем поле. Возвратившись с горнолыжного курорта, он представляет на суд коллег уравнение, ставшее впоследствии основным инструментом математического описания свойств микромира. Оно написано для некоторой описывающей волновой процесс с переменной длиной волны функции. Смысл ее пока не ясен, но уравнение уже содержит в себе столь долгожданную, угаданную Планком, Эйнштейном и Бором, каждым по своему, дискретность! Так, дискретные уровни энергии электрона в атоме возникают здесь естественным образом и связаны с конечностью его размеров. В некотором смысле атом может быть уподоблен скрипке: как скрипка порождает звуки лишь определенных длин волн, так и в атоме на боровских орбитах должно укладываться целое число длин волн, которые можно приписать электрону, движущемуся в поле ядра.

Постепенно, в длительных и непростых спорах лучших умов того времени выкристаллизовывается философская суть только что созданной квантовой физики. Микромир не может быть описан в привычных для нас, каждодневно наблюдаемых и легко измеряемых понятиях координаты, траектории, импульса...

Его можно описывать только вероятностно, и квадрат модуля входящей в уравнение Шредингера волновой функции определяет распределение вероятностей нахождения квантовой частицы в пространстве. Существуют пары физических величин, такие как координата и импульс, энергия и время, угловой момент и фаза, которые не могут быть точно определены одновременно. Индетерминизм входит в физику XX века уже не как результат добровольного отказа от точного описания системы в пользу удобства, а как неизбежное свойство микромира. И тем не менее, при правильной постановке вопросов квантовая механика позволяет получать совершенно точные ответы: как сделать лазер с определенной длиной волны; до какой энергии нужно разогнать частицы, чтобы получить бозон Хиггса; какова должна быть масса полушарий радиоактивного элемента, чтобы взорвалась атомная бомба.



Пауль Дирак



Арнольд Зоммерфельд

Но вернемся к сверхпроводимости. В конце XIX века в связи с развитием мировой системы телеграфной связи увеличение проводимости металлов стало важной технической задачей. Физическая теория не давала ответа на этот вопрос, ибо был неизвестен механизм электропроводности. После открытия электрона начала развиваться электронная теория проводимости. Начало ей дает в 1900 году немецкий физик Пауль Дрude. Замечательно, что и сегодня теория Друде входит в учебные курсы физики как классическая теория электропроводности металлов. В современной версии этой теории, развитой тоже немецким физиком Арнольдом Зоммерфельдом в 1928 году, уже после создания квантовой механики, электроны рассматриваются как квантово вырожденный идеальный газ, заполняющий кристаллическую решетку, в узлах которой находятся ионы атомов металла и, изредка, примеси. «Квантовое вырождение» этого газа, в частности, означает, что, в отличие от газа классического, его частицы – электроны – даже при абсолютном нуле пребывают в постоянном хаотическом движении с огромными скоростями, исчисляемыми процентами от скорости света. Приложение электрического поля приводит к наложению на этот хаос некоторого упорядоченного дрейфа – так в летний вечер ветер сносит облако снующей туда-сюда мошкеры над озером. Удивительно, что при нулевой температуре электроны в своем сложном хаотически направленном движении благодаря причудам квантовой механики умудряются «обходить» ионы решетки. Рассеиваются же они либо на заменяющих ионы примесях, о местоположении которых электронам неизвестно (это происходит и при $T = 0$), либо на отклоняющихся благодаря температурным колебаниям (имеющим место при отличной от нуля температуре) от своих положений равновесия ионов.

Понятно, что в 1900 году всего этого Друде знать не мог – оставалось еще шесть лет до создания «модели пудинга», тринадцать лет до боровских постулатов и более четверти века до создания квантовой теории и изучения на ее основе свойств вырожденного газа электронов и поведения квантовой частицы в периодическом потенциале решетки. Однако оказалось, что модель классического идеального газа электронов, помещенных во внешнее электрическое поле, позволила получить замечательную формулу для проводимости, связывающую плотность тока с напряженностью электрического поля. Следуя в то время уже хорошо известной молекулярной теории, Друде предположил, что при своем движении электроны, подобно совокупности молекул идеального газа, сталкиваются и в процессах столкновений хаотично меняют направление своего импульса. Величина проводимости металла оказалась пропорциональной времени между такими столкновениями. При этом природа столкновений для справедливости полученного результата оставалась не очень существенной – это могли быть, как и в идеальном газе, столкновения между самими электронами, а могли быть и столкновения с другими объектами. Сам Друде предполагал, что электроны отталкиваются от сердцевин непроницаемых ионов.

Как уже было сказано, строгая теория электропроводности металлов будет создана еще через четверть века, а пока ученые спорили о зависимости времени рассеяния, а следовательно и проводимости, от температуры. Имелись три точки зрения. В 1907 году Эйнштейн для объяснения поведения теплоемкости твердых тел при низких температурах предлагает рассматривать частицы, образующие решетку, как осцилляторы, испытывающие температурные колебания. Поэтому первая теория, основываясь на модели Эйнштейна и учитывая, что при абсолютном нуле температур движение осцилляторов замирает, утверждала, что проводи-

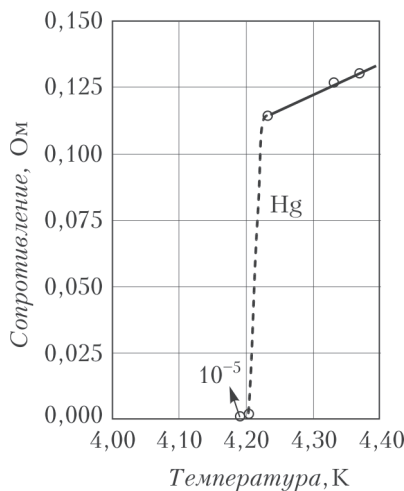
мость металла при сверхнизких температурах должна стремиться к бесконечности. Вторая теория, наоборот, утверждала, что при понижении температуры замирает также и движение электронов, поэтому проводимость металла должна стремиться к нулю. Наконец, учет наличия примесей, на которых электроны могли бы рассеиваться и в отсутствие теплового движения, приводил к выводу, что в таком металле проводимость остается конечной и при нулевой температуре. При этом в отсутствие примесей электронам сталкиваться оказывается не с кем, и проводимость чистого металла должна стремиться к бесконечности – его сопротивление переносу заряда должно исчезнуть.

Камерлинг-Оннес принимает участие в этой дискуссии и находится среди тех, кто верит, что при приближении температуры к абсолютному нулю сопротивление чистого металла стремится к нулю (т.е. его проводимость – величина, обратная сопротивлению, – стремится к бесконечности). В отличие от теоретиков, он является «монополистом» в экспериментальном исследовании сверхнизких, по тем временам, температур. Совершенство предложенный ранее Дюаром каскадный метод сжижения газов,² Камерлинг-Оннес в 1906 году сжижает гелий – последний из элементов таблицы Менделеева, оставшийся при нормальном давлении газообразным вплоть до температуры 4,2 К (почти -269°C). Именно Камерлинг-Оннес в результате тщательных и долгих измерений определяет температуру кипения гелия. Продвигаясь далее в область неисследованного, в 1908 году он обнаруживает и описывает удивительное явление – при температуре около 2 К бурно кипящая поверхность жидкого гелия вдруг успокаивается, наступает штиль. Почти через тридцать лет, в 1937 году, свойства этого необычного состояния жидкого гелия исследовал советский физик Петр Капица. Он обнаружил, что при температуре 2,18 К вязкость жидкого гелия скачком падает до нуля, во всяком случае, учитывая точность измерений, убывает в сотни тысяч раз. Вскоре советский теоретик Лев Ландау дает объяснение наблюдавшемуся Камерлинг-Оннесом «квантовому штилю» – жидкий гелий в этой точке переходит в новое состояние, миллиарды его атомов начинают жить как один организм, они описываются единой волновой функцией и своим поведением напоминают электрон на боровской орбите в атоме.

Итак, научившись работать с жидким гелием и имея в своем распоряжении температуры, всего лишь на градусы отличающиеся от абсолютного нуля, Камерлинг-Оннес приступает к изучению поведения в этой области температур чистых металлов. И начинает он с металлов благородных – золота, платины, серебра, прекрасных проводников электрического тока. Однако, изучая температурные зависимости сопротивления золотых, серебряных и платиновых образцов, Камерлинг-Оннес обнаруживает, что все они, убывая линейно с уменьшением температуры вдали от абсолютного нуля, «выходят на насыщение», т.е. достигают некоторого фиксированного значения, при доступных ему низких температурах. Искомое нуле сопротивление он не находит.

Следующей на очереди была ртуть, возможно потому, что ртуть – металл, остающийся жидким даже при комнатных

² Каскадный метод сжижения газов основан на простой идее. При откачке парообразной фазы вещества, соприкасающейся с его жидкой фазой, вырывающиеся из жидкости быстрые молекулы уносятся насосом из объема сосуществования обеих фаз. В результате средняя кинетическая энергия, а следовательно, и температура жидкости понижаются. Правильно подобрав набор газов с последовательно убывающими температурами кипения и заставляя их откачкой кипеть по очереди, можно достигнуть температур вплоть до 1 К.



Решающий эксперимент, обнаруживающий сверхпроводимость ртутной проволочки. Оригинальный график из лабораторного журнала Лейденского университета

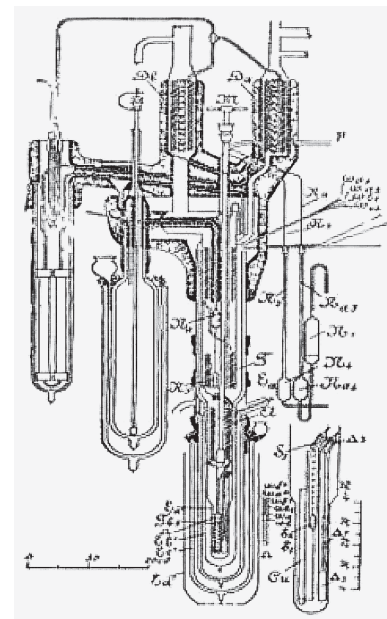
температурах и поэтому проще очищаемый от примесей. Достаточно медленно прогнать волну тепла через образец, и примеси будут смещаться ей вслед (этот метод очистки кристаллов называется зонной плавкой).

Решающий эксперимент начинается 8 апреля 1911 года. Ассистент Камерлинг-Оннеса начинает охлаждать систему с четырех утра, после обеда исследователи переходят к измерениям сопротивления. Вначале сопротивление тонкой ртутной проволочки убывает с падением температуры линейно, как это было и с золотыми образцами, однако при температуре вблизи точки кипения жидкого гелия оно вдруг скачком обращается в ноль!

Случайно или нет, что именно Камерлинг-Оннес, а не кто-нибудь другой, открыл совершенно неожиданный феномен сверхпроводимости? Ведь он искал не что другое, хотел убедиться, что сопротивление чистого металла исчезает при абсолютном нуле температур в согласии с имеющимися в то

сального склада. Во-первых, это ученый, вникающий в суть явления и старающийся понять его природу. Во-вторых, это блестящий экспериментатор, который в поисках подтверждения своих теоретических рассуждений сумел поставить эксперимент, приведший к открытию. И, наконец, в-третьих, это прекрасный инженер и организатор науки. Созданная им Лейденская лаборатория и сегодня служит образцом организации современных научных институтов.

Посмотрите на спроектированную Камерлинг-Оннесом установку. Все эти трубочки нужно было выдуть, соединить, реализовать этот сложнейший прибор в стекле, да еще вся эта система должна была выдерживать давление в целых 6 атмосфер. Конечно, выдувал трубочки замечательный стеклодув, решающие измерения температурной зависимости сопротивления проводил талантливый ассистент



Спроектированная Камерлинг-Оннесом экспериментальная установка, на которой и было обнаружено явление сверхпроводимости

Li	Be											B	C	N	O	F	Ne
Na	Mg											Al 1,14 10	Si	P	S	Cl	Ar
K	Ca	Sc	Ti 0,39 10	V 5,38 142	Cr	Mn	Fe	Co	Ni	Cu	Zn 0,875 5,3	Ga 1,091 5,1	Ge	As	Se	Br	Kr
Rb	Sr	Y	Zr 0,546 4,7	Nb 9,5 198	Mo 0,92 9,5	Tc 7,77 141	Ru 0,51 7	Rh 0,03 5	Pd	Ag	Cd 0,56 3	In 3,4 29,3	Sn 3,72 30	Sb	Te	I	Xe
Cs	Ba	La 6,0 110	Hf 0,12	Ta 4,483 83	W 0,012 0,1	Re 1,4 20	Os 0,655 16,5	Ir 0,14 1,9	Pt	Au	Hg 4,153 41	Tl 2,39 17	Pb 7,19 80	Bi	Po	At	Rn

«Сверхпроводящая» таблица Менделеева. Цифры в зеленых клеточках — это температура перехода металла в сверхпроводящее состояние (K) и критическое магнитное поле (mTл), выше которого сверхпроводник переходит в нормальное, несверхпроводящее состояние

время довольно наивными представлениями классической теории металлов. Сегодня мы можем говорить о его удивительном везении — температура кипения жидкого гелия составляет 4,2 K, а переход ртути в сверхпроводящее состояние происходит при 4,15 K. Большинство металлов если и переходят в сверхпроводящее состояние, то делают это при более низких температурах, недостижимых во времена Камерлинг-Оннеса

Однако важнейшей здесь явилась систематическая составляющая успеха. Камерлинг-Оннес был человеком универ-

(по фамилии Ван Хольст), но идеи и организация всей, как говорят сегодня, инфраструктуры эксперимента — получение необходимого хладагента (жидкого гелия), проектирование установки, создание, наконец, самой лаборатории — принадлежали Камерлинг-Оннесу. Поэтому полученная им в 1913 году Нобелевская премия «за исследования свойств вещества при низких температурах» стала закономерным успехом и наградой за талант, трудолюбие и любознательность.

Задачи

по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №1–2014» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «M2326» или «Ф2333». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений). Решения задач по математике и физике можно присылать также по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно.

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи M2326–M2329, M2331 предлагались на XXXV Турнире городов, задача M2333 предлагалась на XVII Кубке памяти А.Н.Колмогорова.

Задачи M2326–M2333, Ф2333–Ф2339

M2326. На шахматной доске стоят 8 не бьющих друг друга ладей. Докажите, что можно каждую из них передвинуть ходом коня так, что они по-прежнему не будут бить друг друга. (Все восемь ладей передвигаются «одновременно», т.е. если, например, две ладьи бьют друг друга ходом коня, то их можно поменять местами.)

Е.Бакаев

M2327. Дан правильный треугольник ABC с центром O . Прямая, проходящая через вершину C , пересекает описанную окружность треугольника AOB в точках D и E . Докажите, что точки A , O и середины отрезков BD , BE лежат на одной окружности.

А.Заславский

M2328. Каждое ли целое число можно представить в виде суммы кубов нескольких целых чисел, среди которых нет одинаковых?

Ко Пон Гюн (Южная Корея)

M2329. В окружность вписан 101-угольник. Из каждой его вершины опустили перпендикуляр на прямую, содержащую противоположную сторону. Докажите, что хотя бы у одного из перпендикуляров основание попадет на сторону (а не на ее продолжение).

П.Кожевников

M2330. а) Докажите, что существует ровно одна бесконечная влево последовательность цифр $A = \dots 625$, обладающая свойством: при возведении в квадрат числа, оканчивающегося на k последних цифр последовательности A , получается тоже число, оканчивающееся на k последних цифр последовательности A .

б) Докажите, что эта последовательность непериодична.

А.Канель-Белов

M2331*. Петя и Вася играют в такую игру. Сначала на столе лежат 11 кучек по 10 камней. Игроки ходят по очереди, начинает Петя. Каждым ходом игрок берет 1, 2 или 3 камня, но Петя каждый раз выбирает все камни из любой одной кучи, а Вася всегда выбирает все камни из разных кучек (если их больше одного). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может обеспечить себе победу, как бы ни играл его соперник?

Е.Бакаев

M2332*. Пусть точки I и O – центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC соответственно. Пусть O_C – центр окружности, проходящей через основания высот треугольника AIB (т.е. окружности девяти точек треугольника AIB). Пусть E_C – точка, симметричная точке O_C относительно биссектрисы угла AIB . Определим точки E_A и E_B аналогичным образом. Докажите, что точки E_A , E_B и E_C лежат на прямой OI .

С.Ильясов

M2333*. Граф – это конечное множество вершин, некоторые пары вершин соединены ребрами. Говорят, что граф *правильно раскрашен* в t цветов, если каждой из его вершин приписан один из t данных цветов так, что любые две вершины, соединенные ребром, окрашены в разные цвета. Вершины некоторого графа разбиты на три множества A , B , C так, что вершины из множества A не связаны ребрами с вершинами из множества C . Известно, что если удалить из графа все вершины множества C (вместе с выходящими ребрами), то полученный граф можно правильно раскрасить в k цветов, а если удалить из него все вершины множества A – то в n цветов. В какое минимальное количество цветов можно с гарантией правильно раскрасить такой граф?

И.Богданов

Ф2333. Приятели Вася и Петя по утрам гуляют в парке. Однажды вместе с Петей на прогулку вышел и его пес Шарик. Вот Вася, не торопясь, бежит трусцой по прямой дорожке навстречу Пете со скоростью $v = 2$ м/с, а Петя идет с Шариком навстречу Васе со скоростью $u = 1$ м/с. Ровно в 12:00:00 Петя увидел Васю, который в этот момент был от него на расстоянии $L = 300$ м. Он тут же отпустил Шарика, и тот со всех ног со скоростью $3(u + v) = 9$ м/с бросился бежать к товарищу своего хозяина. Шарик, добежав до Васи, некоторое время идет рядом с ним, а затем бросается к своему хозяину. Добежав до него и пройдясь немного рядом с Петей, он снова бежит к Васе, и так повторяется несколько раз. За время сближения приятелей Шарик провел возле каждого из них одно и то же время. Общая длина пути, который успел пройти и пробежать пес, равна $2,5L = 750$ м. Какую часть промежутка времени от 12:00:00 до 12:01:40 Шарик бежал со скоростью 9 м/с? Скорости приятелей не изменялись.

А.Власов

Ф2334. Два сообщающихся цилиндрических сосуда высотой $5h$, частично заполненные жидкостью плотностью ρ до высот $4h$ и $2h$ соответственно, смещены по вертикали на высоту $2h$ (рис.1).

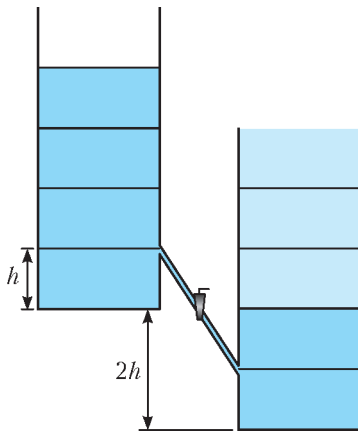


Рис. 1

Кран в трубке изначально закрыт. В правый сосуд добавляют жидкости плотностью $0,8\rho$ столько, что она занимает объем высотой $3h$. Какой по высоте столб жидкости с плотностью $0,8\rho$ останется в правом сосуде после того, как кран откроют и установится равновесие?

Сверху все сосуды открыты. Объемом соединительных трубок можно пренебречь. Площади горизонтальных поперечных сечений сосудов одинаковые.

М.Замятнин

Ф2335. На легком жестком двухъярусном рычаге сложной конструкции уравновешены 4 груза (рис.2). Найдите массу груза m_x , если массы трех остальных

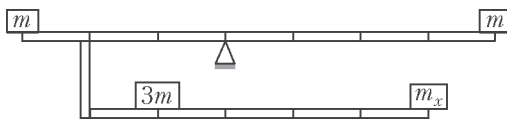


Рис. 2

грузов известны; $m = 6$ кг. Длины частей рычага заданы на рисунке.

З.Михайлов

Ф2336. На рисунке 3 представлена (в относительных единицах) зависимость объема порции воздуха массой $m = 10$ г от его температуры (это примерно шестая часть окружности единичного радиуса). Найдите мак-

симальное давление p_{\max} , которого достигал воздух в процессе нагревания, если $V_0 = 1$ л, а $T_0 = 300$ К. В этой задаче воздух можно считать идеальным газом.

А.Бычков

Ф2337. Вдоль одной прямой расположены две пары скрепленных зарядов. Величины зарядов и их массы указаны на рисунке 4. С какими ускорениями начнут разлетаться эти пары? Какие скорости они приобретут после разлета на большое расстояние? Считайте движение пар

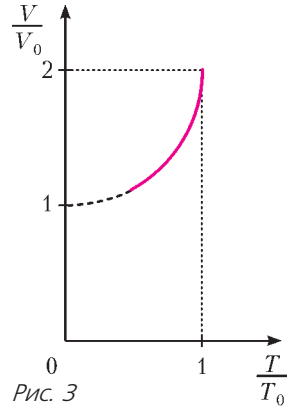


Рис. 3

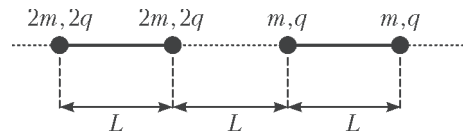


Рис. 4

зарядов поступательным. Расстояние L , заряд q и масса m заданы.

М.Иванов

Ф2338. На двух стенах тренажерного зала висят три одинаковых плоских зеркала. Какое максимальное количество своих изображений видит спортсмен, стоящий в центре зала? Какое максимальное количество изображений спортсмена одновременно может видеть сторонний наблюдатель? Изобразите план зала и выделите на нем области, из которых он может видеть изображение спортсмена. Для каждой области сделайте отдельный рисунок. На отдельном рисунке изобразите область, из которой наблюдатель может видеть максимальное число изображений. План тренажерного зала с зеркалами (вид сверху) приведен на рисунке 5. Считайте спортсмена не слишком крупным (почти точечным).

М.Замятнин

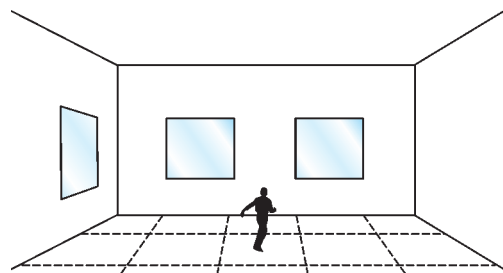
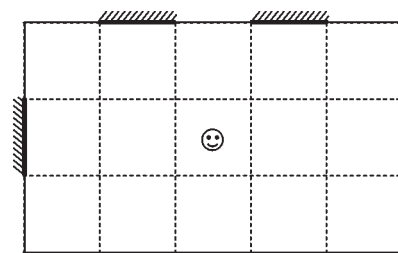


Рис. 5

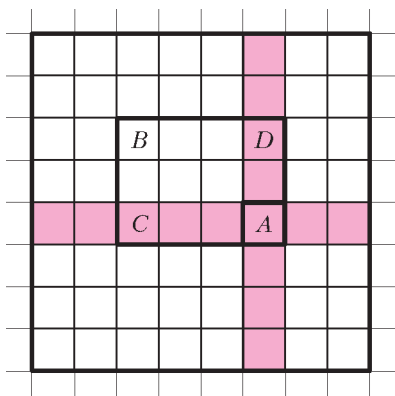
Ф2339. В вакуумированный сосуд емкостью $V = 1,5$ л с жесткими и не проводящими тепло стенками впрыснули $m = 1,1$ г жидкой тяжелой воды T_2O при температуре $0^\circ C$ и герметизировали сосуд. Период полураспада ядер трития $\tau = 12,33$ года. При распаде одного моля ядер трития выделяется $E = 1,79$ ГДж энергии. Молярная теплоемкость тяжелой воды такая же, как и молярная теплоемкость обычной воды, т.е. $75,6$ Дж/(моль · К). Теплота испарения тоже такая же, как и для обычной воды, т.е. $L = 40$ кДж/моль. Какая температура и какое давление будут внутри сосуда через время $t = 2$ ч после начала эксперимента?

Н.Уклонов

Решения задач M2309–M2315, Ф2315–Ф2322

M2309. На доске 8×8 стоят 8 не бьющих друг друга ладей. Все клетки доски распределяются во владения этих ладей по следующему правилу. Клетка, на которой стоит ладья, отдается этой ладье. Клетку, которую бьют две ладьи, получает та из ладей, которая ближе к этой клетке; если же эти две ладьи равноудалены от клетки, то каждая из них получает по полклетки. Докажите, что площади владений всех ладей одинаковы.

Ладья A бьет всего 15 клеток (на рисунке – розовые) – в своей вертикали и своей горизонтали. Рассмотрим



другую клетку C в той же горизонтали, в которой находится A . Ее бьет еще ровно одна ладья B , находящаяся с ней в одной вертикали. Эта же ладья бьет одну клетку D , находящуюся в одной вертикали с A . Тогда A, B, C, D – угловые клетки клетчатого прямоугольника. Если этот

прямоугольник – квадрат, ладьям A и B достанется по половине от клеток C и D . Если же он не квадрат, то одна из клеток C и D достанется ладье A , а другая – ладье B . Отсюда ясно, что ладье A из 15 розовых клеток всего достанется 8 клеток: та, на которой она стоит, и половина от оставшихся 14 клеток (остальные ладьи «заберут» по одной из оставшихся 7 розовых клеток). Аналогично, во владении каждой ладьи окажется 8 клеток.

Л.Медников, А.Семенов, И.Рубанов, А.Шаповалов

M2310. Имеются 100 камней разного веса (одинаковых нет), к каждому приклеена этикетка с указанием его веса. Хулиган Гриша хочет переклеить этикетки так, чтобы общий вес любого набора с числом камней от 1 до 99 отличался от суммы весов, указанных на этикетках из этого набора. Всегда ли он может это сделать?

Ответ: всегда.

Упорядочим камни по возрастанию весов. Затем переклеим этикетки «по кругу»: на 1-й камень – этикетку со 2-го, на 2-й – с 3-го, ..., на 100-й – с 1-го. Теперь на каждом камне, кроме первого, указан *больший* вес. Если в набор A камней 1-й камень не входит, то сумма весов, указанных на его этикетках, больше веса набора A . Если же 1-й камень в набор A входит, то сумма весов на его этикетках меньше веса набора A , поскольку вес дополнительного набора B (составленного из всех камней, не входящих в A) больше суммы весов на этикетках из B .

Л.Медников, А.Семенов, И.Рубанов, А.Шаповалов

M2311. Внутри единичного куба летает муха. Какой наименьший путь она должна пролететь, чтобы побывать на всех гранях куба и возвратиться в начальную точку?

Ответ: $2\sqrt{3}$.

Поместим начало координат в одну из вершин куба и направим оси по его ребрам.

Ясно, что достаточно рассмотреть случай, когда траектория мухи – замкнутая n -звенная ломаная. Пусть (x_i, y_i, z_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, – координаты векторов, задающих ребра ломаной, тогда $d_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}$ – длина i -го ребра и $D = d_1 + d_2 + \dots + d_n$ – длина ломаной. Положим $X = |x_1| + \dots + |x_n|$ (это путь проекции мухи на ось Ox), аналогично, $Y = |y_1| + \dots + |y_n|$, $Z = |z_1| + \dots + |z_n|$. Можно считать, что муха вначале находилась в плоскости $x = 0$ (плоскости одной из граней), побывала в плоскости $x = 1$ противоположной грани и вернулась назад. Это означает, что $X \geq 2$. Аналогично, $Y \geq 2$ и $Z \geq 2$.

Сумма векторов с координатами $(|x_i|, |y_i|, |z_i|)$ равна вектору (X, Y, Z) . Так как сумма длин этих векторов не меньше длины их суммы, имеем

$$d_1 + d_2 + \dots + d_n \geq \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \geq 2\sqrt{3}.^1$$

Примером траектории с длиной $2\sqrt{3}$ является большая диагональ куба, пройденная дважды. Замкнутая траектория такой же длины получится, если муха начнет движение из любой точки внутри куба с вектором скорости, параллельным большой диагонали куба, а далее будет «упруго отражаться» от каждой из граней куба (докажите!).

В заключение отметим, что ответ на аналогичный (гораздо более трудный!) вопрос про правильный тетраэдр рассматривался в задаче M1400 (решение см. в «Кванте» №2 за 1994 г.).

А. Канель-Белов

M2312. В квадратной таблице 10×10 записаны сто положительных чисел. Сумма чисел в каждой строке равна 100. Коле разрешается переставить числа внутри каждой из строк (но не между строками).

¹ Читатель может подумать о том, как выкладки в приведенном решении заменить более геометричным рассуждением с использованием отражения траектории относительно плоскостей граней.

После этого в каждом столбце найдут максимальное число и сложат найденные числа. Докажите, что Коля может добиться того, чтобы полученная сумма была меньше 300.

Покажем, что достаточно переставить числа в каждой строке в порядке убывания. Действительно, максимальное число в m -м столбце тогда будет m -м по величине в некоторой строке, следовательно, оно не превосходит $\frac{100}{m}$ (m -е по величине число некоторой строки не больше чем $\frac{100}{m}$, поскольку сумма m наибольших чисел этой строки не превосходит 100).

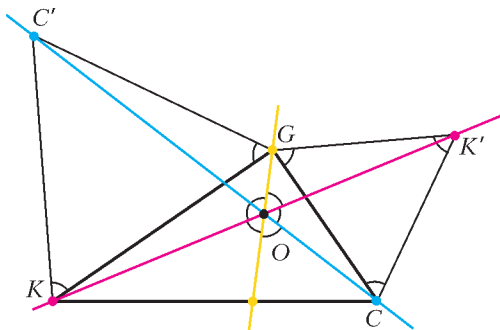
Итак, сумма максимальных чисел в столбцах не превосходит

$$\begin{aligned} \frac{100}{1} + \frac{100}{2} + \frac{100}{3} + \dots + \frac{100}{10} &= \\ &= 100 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{10} \right) < 100 \cdot 3 = 300. \end{aligned}$$

Н.Верещагин

M2313. На бесцветной плоскости покрасили три произвольные точки: одну – в красный цвет, другую – в синий, третью – в желтый. Каждым ходом выбирают на плоскости любые две точки двух из этих цветов и окрашивают еще одну точку в оставшийся цвет так, чтобы эти три точки образовали равносторонний треугольник, в котором цвета вершин идут в порядке «красный, синий, желтый» (по часовой стрелке). При этом разрешается красить и уже окрашенную точку плоскости (считаем, что точка может иметь одновременно несколько цветов). Докажите, что сколько бы ходов не было сделано, все точки одного цвета будут лежать на одной прямой.

Слово «поворот» далее везде означает «поворот на 60° по часовой стрелке». Обозначим данные точки K , C и G . Построим точку K' по точкам C и G и точку C' по G и K (см. рисунок). Тогда при повороте вокруг G



отрезок $K'K$ переходит в CC' . (Если хоть один из этих отрезков вырождается в точку, то KCG – правильный треугольник и его вершины указаны по часовой стрелке, тогда новых точек вообще не появляется.) Итак, угол между прямыми KK' и CC' равен 60° и прямая KK' переходит в CC' при повороте вокруг их общей точки O . Назовем прямую KK' *красной*, прямую CC' – *синей*, а прямую, которая получается поворотом синей прямой вокруг O , – *желтой*. Заме-

тим, что при повороте вокруг любой точки K_1 на красной прямой синяя прямая переходит в желтую, так как расстояния от K_1 до них одинаковые. Поэтому при построении точки G_1 по произвольной точке C_1 , лежащей на синей прямой, и точке K_1 мы попадаем на желтую прямую. Поскольку G получается из C поворотом вокруг K' , то и G лежит на желтой прямой. Аналогично доказывается, что и для других пар цветов вновь окрашиваемая точка лежит на прямой своего цвета.

Отметим, что по сути в этой задаче возникает следующая известная конструкция: на сторонах данного треугольника KCG вне него строятся равносторонние треугольники («вне» можно заменить на «внутри» для всех треугольников). Тогда прямые, соединяющие вершины данного треугольника с противоположными вершинами равносторонних треугольников, пересекаются в одной из точек Торричелли. Из точки Торричелли все стороны треугольника видны под углами 60° или 120° .

Л.Медников, А.Семёнов, И.Рубанов, А.Шаповалов

M2314. У Клары есть комплект всевозможных бус из $4n$ бусинок, где каждая бусинка либо черная, либо белая. Карл испортил один экземпляр, переставив в нем бусинки. Клара хочет перекрасить как можно меньше бусинок в испорченном экземпляре, чтобы снова получились прежние бусы. Какое наибольшее число бусинок ей может понадобиться перекрасить? (Бусы, отличающиеся поворотом или переворотом, считаются одинаковыми.)

Ответ. $2n$ бусинок.

Покажем сначала, что всегда возможно перекрасить не более $2n$ бусинок. Пусть в испорченных бусах w белых и $b = 4n - w$ черных бусинок. Мысленно наложим исходные бусы на испорченные $4n$ способами, отличающимися поворотами. Тогда каждая бусинка исходных бус по одному разу наложится на каждую бусинку испорченных. Значит, всего будет b^2 наложений черной бусинки на черную и w^2 наложений белой на белую. Тогда в каком-то из $4n$ способов будет не

меньше чем $\frac{b^2 + w^2}{4n} \geq \frac{(b+w)^2}{8n} = 2n$ наложений одноцветных бусинок. Теперь достаточно перекрасить все бусинки испорченных бус, на которые в этом наложении накладываются бусинки другого цвета.

Осталось привести пример, когда не удастся обойтись меньшим числом перекрашиваний. Пусть исходные бусы выглядели, как на рисунке а), а Карл их переставил в порядке рисунка б). Легко видеть, что для получения исходных бус среди любых четырех бусинок подряд надо перекрасить не меньше двух, значит, всего потребуется не менее $2n$ перекрашиваний.

Замечание. Из оценки видно, что в любом экстремальном примере должно быть $2n$ черных и $2n$ белых бусинок.

А.Бердников

M2315. Трапеция $ABCD$ вписана в окружность ω . Окружности, вписанные в треугольники ABC и ABD , касаются оснований BC и AD в точках P и Q соответственно. Точки X и Y – середины дуг BC и AD , не содержащих точек A и B соответственно. Докажите, что прямые XP и YQ пересекаются на окружности ω .

Заметим, что X и Y – диаметрально противоположные точки, поэтому для решения задачи достаточно доказать, что $XP \perp YQ$ (рис.1).

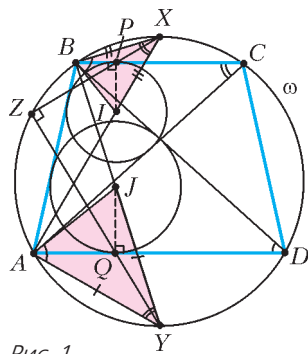


Рис. 1

Пусть I и J – центры вписанных окружностей треугольников ABC и ABD соответственно. Точка I лежит на биссектрисе AX угла BAC , и по теореме о «трезубце» $XI = XB = XC$. Аналогично, J лежит на отрезке BY , и $YJ = YA = YD$. Равнобедренные треугольники XBI и YJA подобны, поскольку $\angle BXI$ и $\angle AYJ$

– вписанные углы, опирающиеся на одну дугу AB . Так как $\angle XAY = \angle XBY = 90^\circ$, то $YJ \perp XB$ и $YA \perp XI$, т.е. соответствующие стороны треугольников XBI и YJA перпендикулярны. Значит, существует поворотная гомотетия h с углом поворота в 90° , переводящая треугольник XBI в треугольник YJA (X переходит в Y , B – в J , I – в A).

Заметим, что $IP \perp BP$, $JQ \perp AQ$, $\angle JAQ = \frac{1}{2} \angle BAD = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle ABC = \angle BIP$. Видим, что прямоугольные треугольники JAQ и BIP подобны, поэтому P и Q – это соответствующие точки в подобных треугольниках XBI и YJA . Значит, поворотная гомотетия h переводит точку P в точку Q , а прямую XP – в прямую YQ . Следовательно, угол между этими прямыми равен 90° , что и требовалось доказать.

Комментарии. Другое решение можно получить применением так называемой *леммы о сегменте*, или *леммы Саваямы*: пусть A, B, C, D – точки на окружности ω , а окружность ω_1 касается окружности ω , прямой BC в точке P и прямой AD в точке Q . Тогда прямая PQ проходит через центр вписанной или одной из вневписанных окружностей треугольника ABC (или BDC, CDA, DAB).¹

В нашей задаче рассмотрим окружность ω_1 , касающуюся дуги AB окружности ω в точке Z и отрезков BC и

Рис. 2

AD в точках P_1 и Q_1 соответственно (рис.2). Очевидно, $P_1Q_1 \perp BC$, а по лемме Саваямы прямая P_1Q_1 должна проходить через I и J . Отсюда следует, что $P_1 = P$ и $Q_1 = Q$. Теперь, рассмотрев гомотетию с центром Z , переводящую ω_1 в ω , получаем, что диаметр PQ переходит в параллельный диаметр $X'Y'$, значит, Z, P и X лежат на одной прямой, и также Z, Q и Y лежат на одной прямой.

А.Заславский, П.Кожевников, В.Протасов

Ф2315. Каретка самописца с пером перемещается относительно бумаги в двух взаимно перпендикулярных направлениях x и y с помощью двух электромоторов. Мотор x может обеспечить максимальную величину скорости перемещения $v_{x \max} = A$, а мотор y – скорость $v_{y \max} = B$ соответственно. За какое минимальное время T самописец сможет нарисовать замкнутую линию, образующую фигуру площадью S ?

Очевидно, что фигура должна иметь оси симметрии, совпадающие с осями координат x и y . Обозначим $t = T/4$. За каждый такой промежуток времени каретка должна переместиться на максимальное расстояние, а все вместе перемещения должны дать ноль. В последовательные четыре промежутка времени t скорости каретки по координатным осям должны принимать, например, такие значения: (A, B) $(A, -B)$ $(-A, -B)$ $(-A, B)$. Получившаяся фигура – это ромб. Его площадь равна

$$S = 2ABt^2 = \frac{ABT^2}{8}.$$

Отсюда находим

$$T = \sqrt{\frac{8S}{AB}} = 2\sqrt{\frac{2S}{AB}}.$$

К.Самописцев

Ф2316. Наклонная плоская поверхность составляет с горизонтом небольшой угол $\alpha = 0,1$ рад и непрерывно движется – трясется. Скорость движения ее точек всегда направлена вдоль линии наискорейшего спуска, а постоянное по модулю ускорение a скачкообразно изменяется – в течение $t = 10^{-3}$ с оно направлено «вниз», затем в течение такого же промежутка времени оно направлено «вверх», потом снова «вниз» и так далее. На поверхности находится брусок, между ним и поверхностью есть трение, характеризующееся коэффициентом $\mu = 0,28$. Брусок соскальзывает вниз с установившейся средней скоростью $v = 0,1$ м/с. Какова величина ускорения a ? Каковы максимальная и минимальная скорости бруска?

Из условия задачи ясно, что часть времени брусок движется с ускорением, направленным вдоль плоскости «вниз», часть времени – с ускорением, направленным вдоль плоскости «вверх», а средняя за период сумма всех сил, действующих на брусок, равна нулю. Предположим сначала, что минимальная и максимальная скорости бруска отличаются мало. Обозначим максимальную величину скорости точек наклонной поверхности через V , тогда в течение промежутка

¹ В лемме Саваямы имеется большое количество конфигураций. Ее применение нередко оказывается ключевым соображением при решении задач, связанных с касанием окружностей. Доказательство и некоторые важные применения этой леммы можно найти в статье В.Протасова «Касающиеся окружности: от Тебо до Фейербаха» («Квант» №4 за 2008 г.).

времени $t(V-v)/V$ брусок движется вниз медленнее, чем движется вниз поверхность, и, соответственно, разгоняется. А в течение следующего промежутка времени $t+t(V-v)/V = t(2V-v)/V$ брусок тормозится. Условие равенства нулю средней по времени проекции действующей на брусок силы на направлении вдоль поверхности таково:

$$(mg \sin \alpha + \mu mg \cos \alpha) \frac{t(V-v)}{V} + (mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha) \frac{t(2V-v)}{V} = 0.$$

Обозначим отношение v/V через x . Из предыдущего условия получаем

$$x = \frac{3 \sin \alpha - \mu \cos \alpha}{2 \sin \alpha} = 0,1.$$

Следовательно, максимальная величина скорости по поверхности равна примерно $V = 1$ м/с, а ускорение по величине равно

$$a = \frac{2V}{t} = \frac{2 \cdot 1 \text{ м/с}}{10^{-3} \text{ с}} = 2 \cdot 10^3 \text{ м/с}^2.$$

Проверим справедливость сделанного предположения о том, что максимальная и минимальная скорости бруска отличаются мало. За время разгона скорость бруска изменяется на величину

$$(g \sin \alpha + \mu g \cos \alpha) \frac{t(V-v)}{V} = 0,0034 \text{ м/с}.$$

А за время торможения она изменяется на величину

$$(g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha) \frac{t(2V-v)}{V} = -0,0034 \text{ м/с}.$$

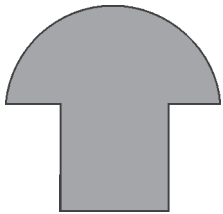
Действительно, изменение скорости бруска мало в сравнении со средней ее величиной.

В результате максимальная и минимальная скорости бруска получаются такими:

$$v_{\max} = 0,1017 \text{ м/с}, \quad v_{\min} = 0,0983 \text{ м/с}.$$

С.Варламов

Ф2317. Фигурку-грибок (см. рисунок), сделанную из сплошного материала плотностью $\rho = k\rho_{\text{воды}}$, поставили на горизонтальное дно бассейна и закрепили пластилином щели между дном бассейна и основанием ножки грибка. Удерживая грибок на месте, залили воду в бассейн, при этом вода под грибок не затекла, а затем перестали удерживать грибок. Размеры фигурки таковы: радиус полусферы шляпки, диаметр цилиндра, образующего ножку грибка, и высота этого цилиндра равны R каждый. Уровень воды в бассейне равен NR ($N > 2$, т.е. грибок целиком находится под водой). С какой силой ножка грибка давит на дно бассейна? При каком максимальном значении k грибок может всплыть? При каком значении N грибок не всплывет никогда?



Воспользуемся приемом, который физики называют «методом отверждения». Представим себе, что такой же по форме грибок, но из воды, находящийся на дне

этого же бассейна рядом с рассматриваемым грибком, вдруг стал твердым и сохранил свою плотность. Очевидно, что этот грибок давит на дно бассейна с силой, равной $\rho_{\text{воды}} g N R \pi (R/2)^2$. Такая же по величине, но направления вверх сила действует со стороны дна на грибок. Масса водяного грибка равна произведению его объема (совпадающего с объемом настоящего грибка) на плотность воды:

$$M_{\text{воды}} = \rho_{\text{воды}} \left(\frac{2\pi R^3}{3} + R\pi \left(\frac{R}{2} \right)^2 \right).$$

Водяной грибок находится в равновесии, поэтому сумма действующих на него сил равна нулю:

$$M_{\text{воды}} g - F - \rho_{\text{воды}} g N R \pi \left(\frac{R}{2} \right)^2 = 0.$$

Отсюда находим величину суммарной силы F , действующей на грибок (уже не очень важно на какой) со стороны окружающей его воды:

$$F = \rho_{\text{воды}} g \pi R^3 \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{N}{4} \right) = \rho_{\text{воды}} g \pi R^3 \frac{11 - 3N}{12}.$$

Эта сила направлена вверх.

Теперь вернемся к нашему твердому грибку. Будем считать, что дно бассейна толкает грибок вверх, а грибок, соответственно, давит на дно с силой f , и если получим отрицательное значение этой силы, то грибок может всплыть, так как пластилин это не клей и удержать грибок на дне он не может. Рассмотрим условие равновесия грибка плотностью $\rho = k\rho_{\text{воды}}$. Сумма сил, действующих на него, должна быть равна нулю:

$$k\rho_{\text{воды}} g \pi R^3 \cdot \frac{11}{12} - \rho_{\text{воды}} g \pi R^3 \left(\frac{11}{12} - \frac{N}{4} \right) - f = 0.$$

Отсюда получаем

$$f = \rho_{\text{воды}} g \pi R^3 \left(\frac{11}{12} (k-1) + \frac{N}{4} \right).$$

Понятно, что максимальное значение k , при котором грибок еще может всплыть, будет достигнуто, если N минимально. Подставим в полученную формулу $N = 2$ и найдем, что $k < 5/12$. Значит,

$$k_{\max} = \frac{5}{12}.$$

Далее, если даже $k = 0$, то при $N = \frac{11}{3}$ грибок никогда не всплывет.

С.Гордюнин

Ф2318. В высокоскоростных газовых центрифугах, используемых для разделения изотопов урана ^{235}U и ^{238}U , стенки цилиндрического сосуда радиусом $r = 0,1$ м вращаются, имея линейную скорость $v = 500$ м/с. Газообразный гексафторид урана UF_6 , молекулы которого первоначально содержат $\rho_1 = 99,3\%$ изотопа ^{238}U и $\rho_2 = 0,7\%$ изотопа ^{235}U , при температуре 300 К медленно прокачивают через центрифугу, отбирая одну часть газа из пристеночных областей, а другую часть – из области вблизи оси вращения. Газ, обогащенный изотопом ^{235}U , пропускают через следующий каскад центрифуг, и так происходит вплоть до получения изотопного состава с $99,9\%$ изотопа ^{235}U и $0,1\%$ изотопа ^{238}U . Сколько каскадов

центрифуг должны стоять последовательно друг за другом, чтобы получить такой результат?

При длительном вращении центрифуги с постоянной угловой скоростью внутри вращающегося сосуда устанавливается стационарное распределение концентраций молекул газа с разными массами. Это, естественно, не тепловое равновесное распределение, так как газ вместе со стенками сосуда вращается. Кинетическая энергия молекул газа, сталкивающихся со стенками, складывается из тепловой неупорядоченной составляющей $3kT/2$, где k – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура, и из упорядоченной составляющей $mv^2/2$. Система отсчета, вращающаяся вместе с сосудом, неинерциальная, поэтому для сохранения возможности использования законов Ньютона нужно вводить центробежную силу инерции и, кроме того, для движущихся материальных точек – еще и силу Кориолиса. Кориолисова сила не изменяет кинетической энергии молекулы, поскольку всегда направлена перпендикулярно ее скорости. Следовательно, можно считать, что в сосуде имеется потенциальное поле сил инерции (центробежных сил). Потенциальная энергия молекул в этом поле вблизи оси вращения выше, чем вблизи стенок сосуда на величину $mv^2/2$. В соответствии с соотношением Больцмана, концентрации молекул вблизи оси вращения центрифуги n_0 и вблизи стенок n_c при стационарном распределении отличаются друг от друга. Их отношение можно описать формулой

$$\frac{n_0}{n_c} = \exp\left(-\frac{mv^2/2}{kT}\right).$$

Понятно, что вблизи оси вращения доля более легких молекул с массами m_1 изотопа ^{235}U немного больше, чем более тяжелых молекул с массами m_2 изотопа ^{238}U . Отношение концентраций молекул, отбираемых из области вблизи оси вращения, выше, чем в смеси, поступающей в центрифугу, в

$$\alpha = \exp\left(\frac{(m_2 - m_1)v^2/2}{kT}\right) \approx 1,162 \text{ раза}.$$

Для нахождения числа N необходимых каскадов центрифуг нужно решить уравнение

$$\alpha^N \rho_2 = 999\rho_1.$$

Отсюда получаем $N = 79$.

С.Варламов

Ф2319. Глубоководный аппарат спустили с корабля над Марианской впадиной, и он начал постепенно опускаться все глубже и глубже. Вне аппарата перед его иллюминатором акванавт Вася установил сосуд с прочными прозрачными кварцевыми стенками (выдерживающими высокую температуру), снабженный сверху и снизу клапанами для открывания или закрывания отверстий, соединяющих внутренность сосуда с окружающей водой. Каждый раз после погружения на очередные сто метров Вася запускал воду в сосуд, открывая два клапана, а потом закрывал верхний клапан, оставляя нижний клапан открытым. Затем он включал нагреватель в сосуде и ждал, когда вода

закипит. После достижения температуры кипения Вася добивался того, чтобы линия раздела пара и горячей воды проходила через метку на стенке сосуда, и измерял плотности пара и воды в сосуде выше и ниже этой метки. Вася заполнил таблицу Excel, в которой глубину погружения отметил в ячейках левой колонки по вертикали, а в двух соседних ячейках по горизонтали поместил значения плотностей пара и воды, соответствующих этой глубине. Сколько всего ячеек заполнил экспериментальными данными Вася?

Максимальное внешнее давление, при котором чистая вода, достигшая определенной температуры, может разделиться на пар и конденсированную воду, составляет по данным справочника $22,12 \text{ МПа} \approx 221,2 \text{ атм}$. Это – критическое давление для воды. При более высоких давлениях вода при любой температуре представляет собой однородное вещество с одинаковой плотностью по всему объему. Наличие растворенных в океанской воде солей, по-видимому, немного повысит это значение давления, так как растворенные в воде вещества в основном присутствуют в виде ионов с разными знаками электрических зарядов, а ионы способствуют объединению молекул воды в кластеры вокруг них. Порядок величины критического давления останется, тем не менее, таким же. Плотность океанской воды несущественно отличается от плотности воды чистой, и на глубине H (м) давление снаружи аппарата составит величину $(1 + H/10 \text{ м}) \text{ атм}$. Таким образом, Вася заполнил данными таблицу вплоть до глубины порядка 2200 метров. Значит, количество занятых данными ячеек будет 66.

С.Варламов

Ф2320. Две одинаковые литиевые плоские батарейки (типа CR216) имеют ЭДС $\mathcal{E} = 3 \text{ В}$, диаметр корпуса $D = 20 \text{ мм}$, толщину корпуса $d = 1,6 \text{ мм}$. Батарейки расположили в воздухе на линии, совпадающей с их осями симметрии, положительными полюсами навстречу друг другу на расстоянии $L = 20 \text{ см}$. Оцените силы электрического взаимодействия батареек. Суммарный электрический заряд каждой батарейки равен нулю.

Для оценки сил взаимодействия батареек заменим их модельными объектами: конденсаторами с диаметрами круглых пластин $D = 20 \text{ мм}$ и расстояниями между пластинами $d = 1,6 \text{ мм}$. Емкость каждого конденсатора равна $C = \epsilon_0 S/d = \epsilon_0 \pi D^2 / (4d)$, разность потенциалов пластин конденсатора равна $U = 3 \text{ В}$. Каждый конденсатор представляет собой электрический диполь с зарядами $Q = \pm UC$, находящимися на расстоянии d друг от друга. Напряженность электрического поля на оси симметрии диполя на большом ($L \gg D$) расстоянии $L = 20 \text{ см}$ от этого диполя в направлении, совпадающем со стрелочкой от плюса к минусу, равна примерно

$$E = \frac{2Qd}{4\pi\epsilon_0 L^3}.$$

(Продолжение см. на с. 34)

Никто не может сказать, почему тело, приведенное в движение, где-нибудь остановится, ибо почему оно скорее остановится здесь, а не там.

Аристотель

Каждая материальная частица в отдельности стремится продолжать дальнейшее движение не по кривой, а исключительно по прямой...

Рене Декарт

От инерции материи происходит, что всякое тело лишь с трудом выводится из своего покоя или движения.

Исаак Ньютон

...проявление инерции в высшей степени отлично от того, которое свойственно обычным силам.

Леонард Эйлер

Если... я удалю какую-то массу достаточно далеко от всех других масс Вселенной, ее инерция упадет до нуля.

Альберт Эйнштейн

...инерция вращения тела зависит не только от масс составляющих его частичек, но и от того, насколько далеко расположены они от оси.

Ричард Фейнман

...свет, обладая инертной массой, теряет энергию на преодоление гравитационного притяжения...

Джей Орир

...закон инерции — один из величайших, самых глубоких и самых безумных законов физики.

Марк Азбель

А так ли хорошо знакома вам инерция?

Даже странно, отчего это понятие, обозначающее одно из основных свойств материи, до сих пор не стало главным героем наших выпусков. Восстановим справедливость и дадим ей право на «сольное выступление».

Инерция удивительным образом сочетает в себе очевидную простоту и замысловатую сложность. Проявляется она и в природе, и в творениях наших рук. Порой бывает помехой, но зачастую безусловно полезна. Так, например, хорошо знакомые всем волчок и юла, оказывается, ведут себя подобно хитроумным гироскопическим приборам, служащим для стабилизации движения и ориентации в пространстве множества транспортных средств. Водители нередко прибегают к вожделению «накатом», разогнавшись и затем долго расходуя накопленную энергию, в обиходе — «инерцию». Детские машинки с маховичком и фонарики-жуки, светящие благодаря нажатиям на рукоятку, — прообразы накопителей энергии, использующих инерцию вращения.

Казалось бы, что общего между собакой, стряхивающей с себя воду, и инерционным термоядерным синтезом? Или между элементарным падением камня на землю и фундаментальными свойствами пространства и времени? Это все она — инерция...

Добавим же в копилку наших представлений о ней еще несколько сюжетов в надежде, что нам удастся внести поправки в прямой перевод латинского слова «inertia», означающего «вялость, неподвижность, бездействие».

Вопросы и задачи

1. Почему молотком можно разбить кирпич на ладони, не ощущая боли от удара?
2. Зачем, желая стряхнуть ртуть в медицинском термометре, мы делаем рукой резкое движение вниз и тотчас останавливаем руку?

3. Почему линейка, подвешенная на бумажных кольцах, при сильном ударе по ней переламывается, а кольца остаются целыми?

4. У какого из автомобилей, груженого или порожнего, больше тормозной путь при одной и той же скорости движения? Считайте коэффициент трения одинаковым; сопротивлением воздуха можно пренебречь.

5. Почему в момент, когда электровоз резко трогается с места, иногда происходит разрыв сцепок вагонов поезда? В какой части поезда скорее всего может произойти разрыв? Как его избежать?

6. Тяжелое тело подвешено на пружине к потолку кабины лифта. Каким будет движение тела относительно кабины, если она внезапно начнет свободно падать под действием силы тяжести?

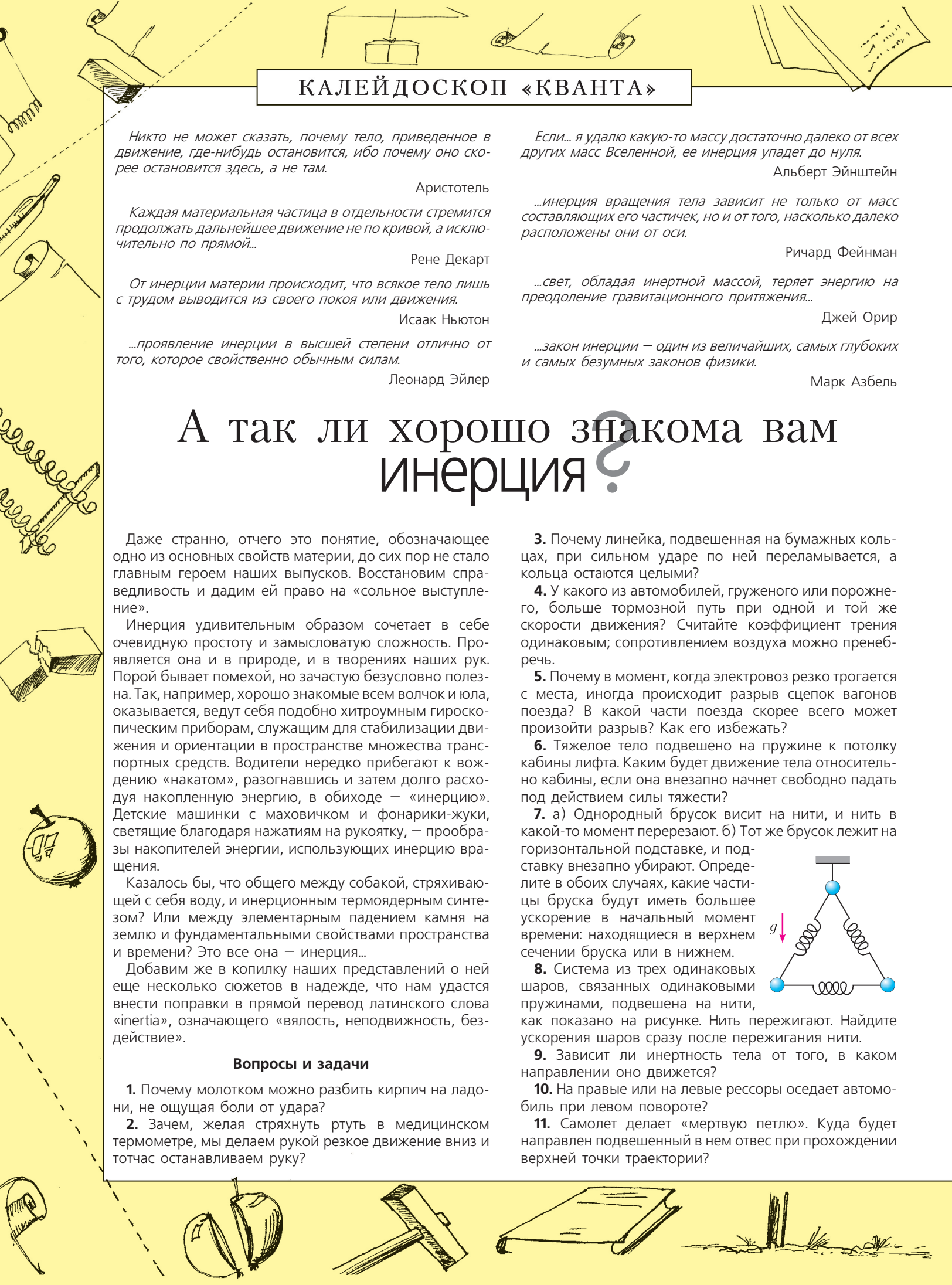
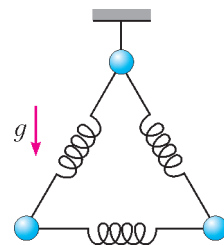
7. а) Однородный брусок висит на нити, и нить в какой-то момент перерезают. б) Тот же брусок лежит на горизонтальной подставке, и подставку внезапно убирают. Определите в обоих случаях, какие частицы бруска будут иметь большее ускорение в начальный момент времени: находящиеся в верхнем сечении бруска или в нижнем.

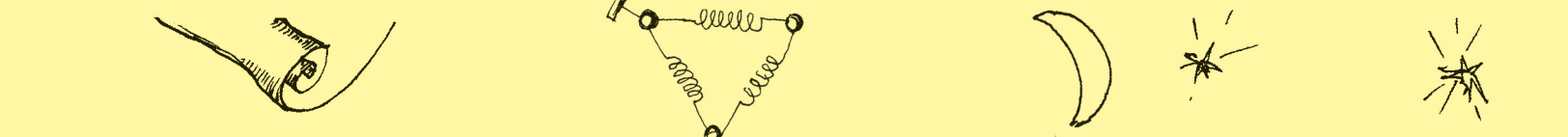
8. Система из трех одинаковых шаров, связанных одинаковыми пружинами, подвешена на нити, как показано на рисунке. Нить пережигают. Найдите ускорения шаров сразу после пережигания нити.

9. Зависит ли инертность тела от того, в каком направлении оно движется?

10. На правые или на левые рессоры оседает автомобиль при левом повороте?

11. Самолет делает «мертвую петлю». Куда будет направлен подвешенный в нем отвес при прохождении верхней точки траектории?





12. Сохранилось бы вращение Земли вокруг своей оси, если бы вдруг исчезло притяжение Солнца?

13. Кто из людей и где более всего приближался к центру Земли?

14. На широте Москвы в землю вертикально вбивают металлический рельс. Какого знака разность потенциалов возникает между его концами?

15. Как изменится момент инерции точки, если уменьшить вдвое ее массу, но удвоить расстояние от точки до оси вращения?

16. Почему момент инерции сплошного диска меньше момента инерции кольца той же массы и того же радиуса?

17. При каком расположении оси вращения, перпендикулярной однородному стержню, его момент инерции будет наименьшим?

18. Для чего внутри ствола винтовок и пушек делают винтовые нарезки?

19. Известно, как отличить сырое яйцо от вареного: их нужно закрутить на столе. Вареное яйцо легко и устойчиво вращается «стоя», сырое — нет. Почему? Как еще можно различить вареное и сырое яйца?

20. Нужен ли маховик машине, работающей на космическом корабле в условиях невесомости?

Микроопыт

Разрежьте яблоко пополам, но не до самого конца, и оставьте его висеть на ноже. Затем ударьте тупой стороной ножа с висящим на нем яблоком по чему-либо твердому, например молотку. Что произойдет? Почему? Где вы сталкивались с похожей ситуацией?

Любопытно, что...

...древние греки различали два вида движения — естественное и насильственное. Сегодня под естественным движением, происходящим без приложения сил, подразумевается инерционное движение по прямой. Однако античные ученые считали, что такое движение должно быть вечным и неизменным только в «надлунном мире», т.е. круговым и равномерным движением небесных светил.

...Ньютон, называвший инерцию «врожденной силой материи», растолковывает этот термин только как «свойство», не мысля ее в качестве реальной физической силы. Внешнюю, приложенную к телу силу он именуется «другой силой». Разъяснение потребовалось из-за неопределенности понятия о силе в XVII и XVIII веках, когда ее значения порой не имели ничего общего с современным, введенным именно Ньютоном, пониманием силы.

...Генрих Герц, неудовлетворенный построениями Галилея и Ньютона, создал свою, так называемую бессильную механику, правда, не принятую научным сообществом. Из нее вытекало, например, что закон инерции справедлив в случае его приложения ко Вселенной в целом, что существует «мировой эфир», обладающий свойствами обычной инертной материи, и что движение планет вокруг Солнца можно объяснить инерцией без привлечения действия сил.

...понятие момента инерции, отвечающего за инертность тела при вращении, было введено в начале XVIII века при разработке теории маятника такими знаменитостями, как Якоб Бернулли и Христиан Гюйгенс.

...изменение периода колебаний маятника при перемещении по земной поверхности Христиан Гюйгенс объяснил вращением Земли, приводящим к ее сплюснутости у полюсов и вздутиям у экватора. Для подтверждения он привел в быстрое вращение шар из мягкой глины, надетый на ось, и наблюдал его сплющивание. Этот опыт, кстати, заметно повлиял на космогонические взгляды Иммануила Канта и Пьера Лапласа, разработавших гипотезы происхождения Солнечной системы.

...очень быстрое вращение Юпитера — один оборот за 10 часов — приводит к сильной его сплюснутости у полюсов. Луна, совершая один оборот вокруг своей оси за целый месяц, напротив, практически не сплюснута.

...самый древний на Земле маховик, обнаруженный при археологических раскопках, был изготовлен пять с половиной тысяч лет назад. Это был гончарный круг — массивный диск из обожженной глины диаметром около метра и с круглым отверстием в центре. После раскрутки диск некоторое время вращался, расходуя накопленную энергию, т.е. исполнял роль маховика.

...еще в 1791 году русский механик Иван Кулибин изобрел «самокатку» с маховиком, сглаживающим неравномерность ее движения. А в 1860 году русским инженером Карлом Шуберским был разработан «маховоз», представлявший собой железнодорожную платформу с громадными маховиками в сотни пудов. Разгоняясь на горизонтальных участках и спусках, вращающиеся маховики потом помогали своей инерцией поезду преодолевать достаточно крутые подъемы.

...две роли массы — как меры инертности и «гравитационного заряда» — изучал еще Ньютон, проводя опыты с маятниками. Период маятника, по его данным, не зависел от веса груза, как и должно было быть в случае равенства инертной и гравитационной масс тел. Тождественность понятий инерции и тяготения была затем возведена в ранг фундаментального принципа физики и легла в основу общей теории относительности Эйнштейна.

...примерно сто лет назад была выполнена серия экспериментов по выявлению носителей заряда в металлах. При внезапной остановке проводника свободные заряды в нем короткое время двигались по инерции, создавая импульс тока. Его направление и показало, что переносчиками заряда являются электроны.

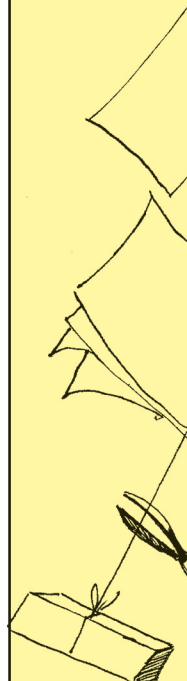
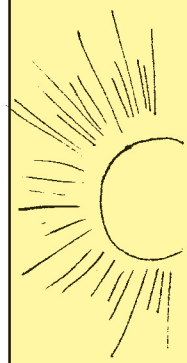
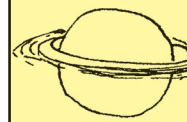
...фотоны, не имея массы покоя, обладают инерцией. Так, они притягиваются к другим телам: пролетая мимо Солнца и звезд, поворачиваются, создавая космические миражи, или, летя к Земле, увеличивают свою энергию, что сказывается на изменении их частоты. Но остановить, замедлить либо ускорить фотоны, увы, нельзя.

Что читать в «Кванте» об инерции

(публикации последних лет)

1. «Физика внутри автобуса» — 2006, №1, с.27;
2. «Физика в «Рассказах о животных» — 2008, №4, с. 31;
3. «Обтекание вращающихся тел» — 2010, №2, с.49;
4. «Физический калейдоскоп. Выпуск 3» — 2012, Приложение №3, с.11, 16,126;
5. «Мог ли Галилей открыть закон всемирного тяготения» — 2013, №2, с.16;
6. «Прекрасные моменты физики» — 2013, №5-6, с.31.

Материал подготовил А.Леонovich



(Начало см. на с. 25)

Эта величина существенно зависит от расстояния L . Положительный заряд второго диполя при заданном в условии задачи взаимном расположении диполей находится в более сильном поле, чем его отрицательный заряд, следовательно, батарейки будут отталкиваться друг от друга. Силы их взаимного отталкивания по порядку величины будут равны

$$F = \frac{6Q^2 d^2}{4\pi\epsilon_0 L^4} = \frac{3\pi\epsilon_0 U^2 D^4}{32L^4} \approx 2,3 \cdot 10^{-15} \text{ Н.}$$

Как видно из полученного ответа, результат от толщины батареек не зависит.

С.Варламов

Ф2321. Коэффициент преломления света у жидкого масла $n = 1,47$, плотность масла $\rho = 0,95 \text{ г/см}^3$. Капелька прозрачного масла в воздухе представляла собой маленький шарик, а упав на поверхность воды, она превратилась в круглое пятно радиусом $r = 2,5 \text{ мм}$. Если высоко над масляным пятном поместить небольшой (точечный) источник света, то видны два изображения этого источника: более яркое под поверхностью воды на глубине $h_1 = 10 \text{ мм}$ и менее яркое над масляным пятном на высоте $h_2 = 3 \text{ мм}$. Оцените величину радиуса масляной капельки в воздухе.

Капля масла, имея меньшую плотность, чем вода, находится в равновесии на поверхности воды. Поскольку видны четкие изображения точечного источника, то это означает, что форма капли близка к форме тонкой линзы с разными радиусами кривизны сверху и снизу. Более яркое изображение источника под поверхностью воды возникает вследствие отражения света от поверхности раздела воздух–масло, а менее яркое изображение, находящееся над поверхностью воды, соответствует отражению света от границы раздела масло–вода. Изображение удаленного источника в сферическом зеркале возникает в его фокусе, находящемся в середине радиуса зеркала. Поэтому радиус кривизны границы раздела воздух–масло в верхней части масляной фигуры равен

$$R_1 = 2h_1 = 20 \text{ мм} \gg 2,5 \text{ мм}.$$

Радиус кривизны R_2 поверхности раздела масло–вода внизу капли будем искать из условия, что свет дважды пошел через линзу и отразился от сферического зеркала радиусом R_2 :

$$\frac{1}{h_2} = 2(n-1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + \frac{2}{R_2}.$$

Отсюда находим

$$R_2 \approx 10,3 \text{ мм} \gg 2,5 \text{ мм}.$$

Если предположить (правда, это не соответствует действительности), что радиусы кривизны поверхностей раздела сверху и снизу не зависят от расстояния от центра капли, т.е. что капля составлена из двух сегментов шаров разных радиусов R_1 и R_2 , то объем масла равен примерно

$$V = \frac{5\pi r^4}{12} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

Теперь можно сделать оценку для радиуса капли

масла, когда она падала в воздухе:

$$r_0 = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{5}{16} r^4 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)} \approx 1,2 \text{ мм}.$$

Конечно, это не точное значение, но перед отрывом от кончика пипетки, из которой выдавливается масло, капля действительно имеет радиус порядка 1 мм.

Обратим внимание на то, что, в соответствии с проведенной оценкой объемов верхней и нижней частей капли, ниже уровня воды, совпадающего с краями масляного пятна, находится приблизительно 2/3 объема капли, плотность которой весьма близка к плотности воды. Поскольку такое равновесие возможно только в случае, если поверхность воды вблизи краев капли не является плоской, то в полученном решении обнаруживается другая – более сложная – задача: а какова настоящая форма поверхностей масла и какова форма поверхности воды вблизи масляного пятна? Ее заинтересованные читатели, возможно, будут решать самостоятельно.

В.Маслов

Ф2322. Студент Вася, узнав о существовании эффектов общей теории относительности, решил оценить влияние человека, например Евклида, на результат проводимых им геометрических измерений. Вася предположил, что космонавт с именем Евклид, масса которого $M = 70 \text{ кг}$, находясь в космосе вдали от Земли и других массивных тел, начертит специальным маркером для вакуума вокруг себя окружность радиусом $R = 1 \text{ м}$, а затем с помощью необычайно точных приборов измерит отношение длины окружности L к ее диаметру D . В каком знаке после запятой полученный им экспериментальный результат отличается от теоретического значения числа π в Евклидовой геометрии (3,1415926535897932384626433832795...)? Гравитационная постоянная $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$.

Вклад массивного Евклида в гравитационный потенциал в том месте, где нарисована окружность, равен по порядку величины GM/R . Отношение этой величины к квадрату скорости света с определяет релятивистский фактор

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{GM/R}{c^2}},$$

который изменит отношение интересующих нас длин. Отличие числа L/D от его теоретического значения π имеет порядок

$$\frac{\pi GM}{Rc^2} \approx 1,6 \cdot 10^{-25}$$

и будет обнаружено только в 25-м знаке после запятой. Лишь выделенные красным цветом цифры в числе $\pi = 3,1415926535897932384626433832795$ будут другими! Правда, для обнаружения эффекта длину окружности и ее диаметр Евклид должен измерить с ошибкой, не превышающей величины 10^{-25} м . А это на десять порядков меньше, чем диаметр протона – ядра атома водорода ($\approx 1,7 \cdot 10^{-15} \text{ м}$).

С.Варламов

Задачи

1. Дана дробь $\frac{2}{3}$. Разрешается много раз в любом порядке выполнять следующие операции: прибавлять 2013 к числителю или прибавлять 2014 к знаменателю. Можно ли с помощью только этих операций получить дробь, равную $\frac{3}{5}$?

К.Кохась



2. В ящике у Гарри Поттера 100 шариков — красных, белых и зеленых. Три из них — волшебные, они время от времени меняют цвет (на любой из этих трех). Однажды Гарри Поттер заглянул в ящик и увидел, что красных шариков больше, чем белых, а белых больше, чем зеленых. Заглянув через минуту, он увидел, что все стало наоборот: зеленых больше, чем белых, а белых больше, чем красных. Сколько белых шариков он увидел, когда заглядывал в ящик первый раз?

Д.Максимов



3. Джентльмены всегда говорят правду знакомым и лгут незнакомым. Собрались как-то 50 джентльменов, и каждый сказал каждому из остальных какую-то из фраз: У меня четное число знакомых в этой компании или У меня нечетное число знакомых в этой компании. Может ли так быть, что первая фраза была произнесена ровно 2013 раз?

А.Солынин

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6–8 классов.

Эти задачи предлагались на районном туре LXXX Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике.



4. Сумасшедший конструктор создал часы с 150 стрелками. Первая стрелка крутится со скоростью один оборот в час, вторая делает 2 оборота в час, ..., 150-я стрелка делает 150 оборотов в час. Часы запустили из положения, когда все стрелки смотрели строго вверх. Когда в процессе работы часов встречаются две стрелки или более, эти стрелки немедленно отваливаются. Через какое время после запуска отвалится стрелка, вращающаяся со скоростью 74 оборота в час?

К.Кохась



5. а) Разрежьте клетчатый прямоугольник размером 9×10 клеток на несколько квадратов так, чтобы среди них было ровно два квадрата с нечетной стороной. Разрезы должны идти по сторонам клеток.
б) Клетчатый прямоугольник размером 19×20 клеток разрезан на несколько квадратов (все разрезы идут по сторонам клеток). Какое наименьшее число квадратов с нечетной стороной может оказаться среди них?

К.Сухов



Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Мы завершаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» или по электронному адресу: savin.contest@gmail.com (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон. По традиции, кружки-победители заочного конкурса приглашаются на финальный очный турнир.

11. Существуют ли такие различные натуральные числа a, b, c, d , что

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d}?$$

В. Расторгуев

12. Вася нарисовал на листе бумаги контуры двух выпуклых пятиугольников, а затем сделал разрезы по проведенным линиям. На какое наибольшее возможное число кусков мог распасться лист бумаги?

Фольклор

13. Сколько различных целочисленных решений (x, y) имеет уравнение $xy = x + y + 999\,999\,999$?

Г. Гальперин

14. Даны три треугольника: остроугольный, прямоугольный и тупоугольный. Известно, что два из них можно приложить друг к другу так, что получится треугольник, равный третьему. Какому из трех данных треугольников он равен?

Б. Френкин

15. В стране несколько городов. Между каждыми двумя городами нужно установить воздушное сообщение одной из трех авиакомпаний. Докажите, что это можно сделать таким образом, что ни одна авиакомпания не обладает тем свойством, что из любого города можно попасть в любой другой город только ее рейсами.

Фольклор

42-й Уральский турнир юных математиков

И.РУБАНОВ, Л МЕДНИКОВ

Люди любят игры – от снежков и салочек до футбола и тетриса. А любимая игра многих ребят, занимающихся математикой, называется «Математический бой», а короче – *матбой*. Придуманные в середине 1960-х годов ленинградским учителем Иосифом Яковлевичем Веребейчиком, матбои быстро прижились и распространились. А в начале 1990-х возникли первые турниры матбоев. Среди них – Уральский турнир юных математиков, проходящий два раза в год: в феврале в Кирове, где в 1993 году он состоялся впервые, и в ноябре-декабре – в одном из других городов России. Уральские турниры популярны как среди учителей – в последние годы они собирают по 60-70 команд, так и среди учеников: когда руководитель одного из петербургских кружков недавно пригрозил не сделавшим домашнее задание, что не возьмет их в команду, задание к следующему занятию выполнили все. Надо сказать, что название «Уральский» так же абстрактно, как и наука, которой турнир посвящен:

турниры проходили и в Тобольске, и в Чебоксарах, и даже в Санкт-Петербурге.

Мы предлагаем вам подборку задач с 42-го Уральского турнира, состоявшегося в декабре 2013 года в Казани. Полные сводки материалов этого и предыдущих турниров можно найти в интернете по адресу: <http://cdoosh.ru/ural/ural.html>

Команда обладает гораздо большей «решательной мощностью», чем участник индивидуальной математической олимпиады. Поэтому и задачи, предлагаемые на матбоях, нередко отличаются от задач математических олимпиад и большей сложностью, и необходимостью большей технической работы (вычисления, перебор случаев), и наличием малозаметных ловушек. Но как раз это приближает их к тем задачам, с которыми большей частью приходится иметь дело математику в его повседневной работе.

Желаем читателям победы над предложенными задачами и удовольствия от их решения.

6 класс

1. Докажите, что в любом натуральном шестизначном числе, делящемся на 101, можно поменять местами две цифры так, чтобы получилось шестизначное число, также делящееся на 101.

2. Имеется 20 последовательных натуральных чисел. Могло ли оказаться так, что первое число делится на 1, второе — на 2, третье — на 3, ..., девятнадцатое — на 19, а двадцатое — на 400?

3. В натуральном числе, не оканчивающемся на цифру 0, вычеркнули два нуля подряд. В результате этого число уменьшилось в k раз, где k — натуральное число. Найдите наибольшее возможное значение k .

4. Можно ли окрасить каждое натуральное число в синий, зеленый или красный цвет так, чтобы все три цвета присутствовали и цвет суммы любых двух разноцветных чисел не совпадал с цветами слагаемых?

5. В Министерстве Пропаганды работали честные сотрудники (которые всегда говорили правду) и патологические лжецы (которые всегда лгали). Каждый сотрудник знал про любого другого, честный тот или лжец. Вновь назначенный Министр Пропаганды у каждого подчиненного спросил про какого-то другого подчиненного, честный тот или лжец. При этом ни про какого подчиненного Министр не спрашивал дважды. После опроса Министр выгнал из Министерства всех сотрудников, которые были названы честными. Могло ли у Министра остаться ровно 2013 подчиненных?

6. В доисторические времена на побережье круглого острова было 2013 деревень и каждые две соседние деревни были соединены двумя разными дорогами с односторонним движением разного направления. Вождь-строитель может между любыми двумя деревнями проложить новую дорогу с односторонним движением, а также посередине любой дороги построить новую деревню. Докажите, что в любой момент времени найдется циклический маршрут по четному числу деревень, который через каждую деревню проходит не более одного раза.

7. Шахматный конь (обозначенный на рисунке буквой К) может совершать ходы в восьми направлениях. Назовем ходы на клетки, обозначенные цифрой 1, *казанскими*, а на клетки, обозначенные цифрой 2 —

	1		2	
2				1
		К		
1				2
	2		1	

вятскими. Может ли конь обойти шахматную доску 8×8 , побывав на каждой ее клетке ровно по одному разу и последним ходом вернувшись в исходную клетку так, чтобы казанские и вятские ходы чередовались?

8. На плоскости проведено 100 прямых. Оказалось, что среди любых четырех из них найдутся две параллельные. Докажите, что среди любых семи из них найдутся три параллельные.

9. Внутри квадрата со стороной 20 проведено несколько отрезков суммарной длины 160, которые разбивают его на несколько прямоугольников. При этом концы каждого проведенного отрезка принадлежат

другим отрезкам или сторонам квадрата и никакие два отрезка не имеют больше одной общей точки. Докажите, что хотя бы у одного прямоугольника периметр не меньше площади.

10. Десять школьников посылали в течение вечера sms-ки друг другу. Каждый послал sms-ки ровно пяти другим школьникам. Какое наибольшее число школьников могло не получить ни одной sms-ки?

7 класс

1. Для любых попарно различных целых чисел x , y и z докажите неравенство

$$|(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3| \geq 6.$$

2. На доске записано 100 подряд идущих натуральных чисел. Вася перемножил 50 чисел: 25 самых больших и 25 самых маленьких. Потом он перемножил 50 оставшихся чисел. Могла ли сумма полученных произведений равняться 100! (т.е. $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 100$)?

3. На доске написано натуральное число. Каждую минуту к нему прибавляют удвоенное количество его натуральных делителей (считая 1 и само число) и записывают полученное число на доску вместо исходного. Какое наибольшее количество точных квадратов может оказаться на доске за сутки?

4. На тропинке между домом Винни-Пуха и домом Пятачка на середине пути поселилась Сова, и еще где-то поселился Тигра. Проходя мимо дома Совы, под впечатлением от увиденного, Винни-Пух уменьшает скорость по сравнению со своей обычной скоростью на 20%. Проходя мимо дома Тигры, под впечатлением от увиденного, Винни-Пух увеличивает скорость по сравнению со своей обычной скоростью на 20%. Оказалось, что появление новых соседей никак не изменило время, необходимое Винни-Пуху, чтобы дойти до Пятачка и вернуться домой. Где мог поселиться Тигра? От дома Пятачка Винни-Пух идет с той же скоростью, с которой к нему подошел.

5. Диего хочет покрыть квадрат 6×6 восемнадцатью фигурками домино 1×2 . Может ли он так разместить в квадрате три фигурки (без наложений), чтобы оставшуюся часть квадрата можно было покрыть оставшимися фигурками единственным способом?

6. При каких натуральных k можно разрезать какой-нибудь треугольник на k четырехугольников равной площади?

7. В остроугольном треугольнике ABC проведена биссектриса BD . В треугольнике ADB проведена высота DE , а в треугольнике BCD — медиана DF . Оказалось, что $BC + FD = 2BE$. Найдите угол DFC .

8. На шахматной доске отмечены 32 клетки. Какое наибольшее количество коней можно гарантировано поставить на эти клетки так, чтобы они не били друг друга?

9. В летний лагерь приехали 300 школьников. Оказалось, что количество троек попарно знакомых школьников больше, чем количество пар знакомых школьников. Докажите, что найдется школьник, знакомый хотя бы с пятью другими.

10. В первый класс простоквашинской средней шко-

лы зачислены 90 детей. У каждого из них не менее 30 друзей среди остальных первоклассников. Докажите, что всех 90 человек можно так разбить на три класса по 30 человек, чтобы у каждого был хотя бы один друг в его классе.

8 класс

1. 2013 год – первый со времен Средневековья, в записи которого использованы четыре последовательные цифры. Сколько таких лет (до 10000 г.) еще будет?

2. Сколькими способами можно расставить во всех клетках таблицы 4×4 числа 1 и 2 так, чтобы суммы чисел во всех строках и столбцах были просты?

3. Может ли натуральное число делиться на все числа от 1 до 500, кроме каких-то двух последовательных? Если да, то найдите эти два числа (укажите все варианты).

4. В строчку выложены 25 карточек, на k из которых написана буква A , а на остальных – буква B . Для каждых трех карточек, лежащих подряд, находят букву, встречающуюся среди них чаще, и под средней из этих трех карточек кладут карточку с такой буквой; таким образом получается вторая строчка из 23 карточек. Такое же действие проделывают со второй строчкой и так далее. При каком наименьшем k независимо от расположения карточек в первой строчке можно наверняка утверждать, что на единственной карточке 13-й строчки будет написана буква A ?

5. Несколько натуральных чисел выписаны в строчку. Каждую минуту между каждыми двумя числами, стоящими рядом, вписывается их сумма. Сколько раз на доске будет написано число 2013 через 2013 минут, если вначале выписаны числа 1 и 1000?

6. Рациональные числа a, b, c удовлетворяют условию $\frac{1}{a+bc} + \frac{1}{b+ac} = \frac{1}{a+b}$. Докажите, что число

$\sqrt{\frac{c-3}{c+1}}$ рационально.

7. Положительные числа x, y, z удовлетворяют условию $x + y + z = 18xyz$. Докажите неравенство

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 2yz + 1}} + \frac{y}{\sqrt{y^2 + 2xz + 1}} + \frac{z}{\sqrt{z^2 + 2xy + 1}} \geq 1.$$

8. На диагонали AC прямоугольника $ABCD$ выбраны такие точки E и F , что $AE = AB$ и $AF = AD$. Пусть G и H – основания перпендикуляров, опущенных на сторону AB из точек E и F соответственно. Докажите, что $AG + FH = AC$.

9. На сторонах AC и AB треугольника ABC лежат точки D и E соответственно. Прямые BD и CE пересекаются в точке S , M – середина отрезка CS . Прямая BM пересекает отрезок CD в точке T . Известно, что $BE = ES = 1$ и $CD = DS = 2$. Докажите, что $AB = AT$.

10. Точка D лежит на стороне AC равностороннего треугольника ABC . Пусть F – основание перпендикуляра, опущенного из D на BC , K – основание перпендикуляра, опущенного из F на AB , E – основание перпендикуляра, опущенного из K на AC . Точка L – середина BC . Прямые KE и FD пересекаются в точке P . Докажите, что BP делит AL пополам.

11. Точки K и L на стороне AB треугольника ABC таковы, что $\angle ACK = \angle KCL = \angle LCB$. Точка M на BC такова, что $\angle MKC = \angle BKM$, ML – биссектриса угла KMB . Найдите угол MLC .

12. У игроков A и B есть 100 фишек, занумерованных числами от 1 до 100. Каждым ходом A выбирает фишку, а B ставит ее на свободное поле полосы $1 \times m$ (вначале все поля свободны). После четырех ходов, если фишки расположены на доске по возрастанию номеров, выигрывает B , в противном случае – A . При каких m у B есть выигрышная стратегия?

Поправка

В предыдущем номере журнала в статье «Заключительный этап XXXIX Всероссийской олимпиады школьников по математике» по вине редакции пропущена часть списка призеров олимпиады.

Диплом призера получили также:

по 9 классам –

Зубрилина Нина – Москва, Центр образования «Пятьдесят седьмая школа»,

Лукьянов Илья – Ульяновск, лицей при УлГТУ,

Макаров Владислав – Санкт-Петербург, школа 450,

Александров Максим – Москва, гимназия 1543,

Думанский Илья – Новосибирск, гимназия 1,

Нестеров Никита – Ульяновск, лицей 20,

Очков Дмитрий – Чебоксары, лицей 3,

Азангулов Искандер – Набережные Челны, гимназия 26,

Басимова Наталья – Москва, ФМШ 2007,

Куликов Алексей – Санкт-Петербург, ФМЛ 30,

Мусаткина Дарья – Чебоксары, лицей 3,

Савон Юлия – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,

Карагодин Никита – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,

Корчагин Максим – Казань, лицей-интернат 2,

Муравьев Кирилл – Казань, лицей им. Н.И.Лобачевского при КФУ,

Проскуряков Александр – Казань, лицей им. Н.И.Лобачевского при КФУ,

Рускин Алексей – Долгопрудный, ФМЛ 5;

по 10 классам –

Пикалов Арсений – Новосибирск, Аэрокосмический лицей имени Ю.В.Кондратюка,

Подузов Никита – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,

Стрельцова Елизавета – Майкоп, лицей 8;

по 11 классам –

Акбаров Артур – Москва, СУНЦ МГУ,

Зверев Иван – Москва, школа 853,

Туманов Владислав – Новосибирск, лицей 130 имени академика М.А.Лаврентьева,

Оганесян Кристина – Жуковский, Свободная школа.

Никто не может сказать, почему тело, приведенное в движение, где-нибудь остановится, ибо почему оно скорее остановится здесь, а не там.

Аристотель

Каждая материальная частица в отдельности стремится продолжать дальнейшее движение не по кривой, а исключительно по прямой...

Рене Декарт

От инерции материи происходит, что всякое тело лишь с трудом выводится из своего покоя или движения.

Исаак Ньютон

...проявление инерции в высшей степени отлично от того, которое свойственно обычным силам.

Леонард Эйлер

Если... я удалю какую-то массу достаточно далеко от всех других масс Вселенной, ее инерция упадет до нуля.

Альберт Эйнштейн

...инерция вращения тела зависит не только от масс составляющих его частичек, но и от того, насколько далеко расположены они от оси.

Ричард Фейнман

...свет, обладая инертной массой, теряет энергию на преодоление гравитационного притяжения...

Джей Орир

...закон инерции — один из величайших, самых глубоких и самых безумных законов физики.

Марк Азбель

А так ли хорошо знакома вам инерция?

Даже странно, отчего это понятие, обозначающее одно из основных свойств материи, до сих пор не стало главным героем наших выпусков. Восстановим справедливость и дадим ей право на «сольное выступление».

Инерция удивительным образом сочетает в себе очевидную простоту и замысловатую сложность. Проявляется она и в природе, и в творениях наших рук. Порой бывает помехой, но зачастую безусловно полезна. Так, например, хорошо знакомые всем волчок и юла, оказываются, ведут себя подобно хитроумным гироскопическим приборам, служащим для стабилизации движения и ориентации в пространстве множества транспортных средств. Водители нередко прибегают к вожделению «накатом», разогнавшись и затем долго расходуя накопленную энергию, в обиходе — «инерцию». Детские машинки с маховичком и фонарики-жуки, светящие благодаря нажатиям на рукоятку, — прообразы накопителей энергии, использующих инерцию вращения.

Казалось бы, что общего между собакой, стряхивающей с себя воду, и инерционным термоядерным синтезом? Или между элементарным падением камня на землю и фундаментальными свойствами пространства и времени? Это все она — инерция...

Добавим же в копилку наших представлений о ней еще несколько сюжетов в надежде, что нам удастся внести поправки в прямой перевод латинского слова «inertia», означающего «вялость, неподвижность, бездействие».

Вопросы и задачи

1. Почему молотком можно разбить кирпич на ладони, не ощущая боли от удара?
2. Зачем, желая стряхнуть ртуть в медицинском термометре, мы делаем рукой резкое движение вниз и тотчас останавливаем руку?

3. Почему линейка, подвешенная на бумажных кольцах, при сильном ударе по ней переламывается, а кольца остаются целыми?

4. У какого из автомобилей, груженого или порожнего, больше тормозной путь при одной и той же скорости движения? Считайте коэффициент трения одинаковым; сопротивлением воздуха можно пренебречь.

5. Почему в момент, когда электровоз резко трогается с места, иногда происходит разрыв сцепок вагонов поезда? В какой части поезда скорее всего может произойти разрыв? Как его избежать?

6. Тяжелое тело подвешено на пружине к потолку кабины лифта. Каким будет движение тела относительно кабины, если она внезапно начнет свободно падать под действием силы тяжести?

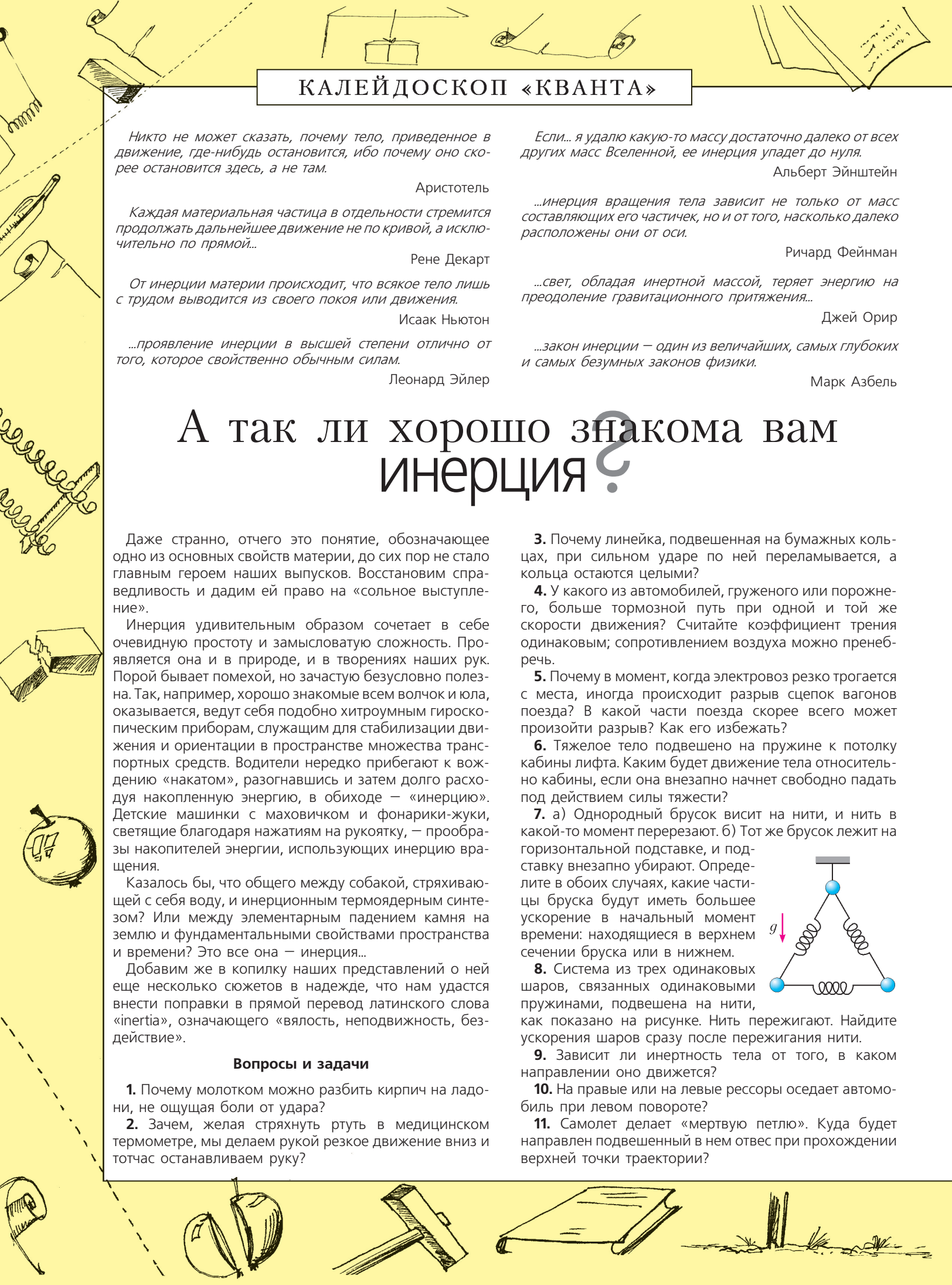
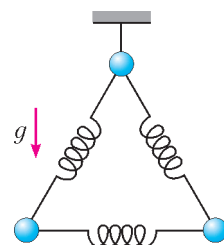
7. а) Однородный брусок висит на нити, и нить в какой-то момент перерезают. б) Тот же брусок лежит на горизонтальной подставке, и подставку внезапно убирают. Определите в обоих случаях, какие частицы бруска будут иметь большее ускорение в начальный момент времени: находящиеся в верхнем сечении бруска или в нижнем.

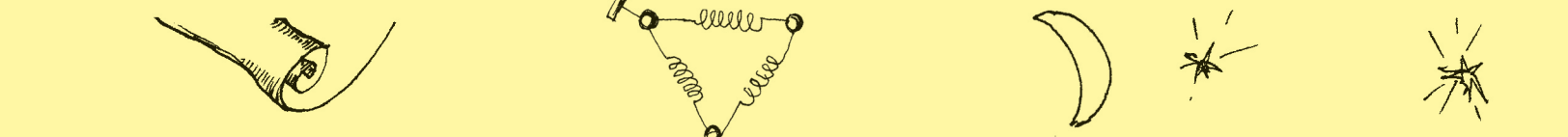
8. Система из трех одинаковых шаров, связанных одинаковыми пружинами, подвешена на нити, как показано на рисунке. Нить пережигают. Найдите ускорения шаров сразу после пережигания нити.

9. Зависит ли инертность тела от того, в каком направлении оно движется?

10. На правые или на левые рессоры оседает автомобиль при левом повороте?

11. Самолет делает «мертвую петлю». Куда будет направлен подвешенный в нем отвес при прохождении верхней точки траектории?





12. Сохранилось бы вращение Земли вокруг своей оси, если бы вдруг исчезло притяжение Солнца?

13. Кто из людей и где более всего приближался к центру Земли?

14. На широте Москвы в землю вертикально вбивают металлический рельс. Какого знака разность потенциалов возникает между его концами?

15. Как изменится момент инерции точки, если уменьшить вдвое ее массу, но удвоить расстояние от точки до оси вращения?

16. Почему момент инерции сплошного диска меньше момента инерции кольца той же массы и того же радиуса?

17. При каком расположении оси вращения, перпендикулярной однородному стержню, его момент инерции будет наименьшим?

18. Для чего внутри ствола винтовок и пушек делают винтовые нарезки?

19. Известно, как отличить сырое яйцо от вареного: их нужно закрутить на столе. Вареное яйцо легко и устойчиво вращается «стоя», сырое — нет. Почему? Как еще можно различить вареное и сырое яйца?

20. Нужен ли маховик машине, работающей на космическом корабле в условиях невесомости?

Микроопыт

Разрежьте яблоко пополам, но не до самого конца, и оставьте его висеть на ноже. Затем ударьте тупой стороной ножа с висящим на нем яблоком по чему-либо твердому, например молотку. Что произойдет? Почему? Где вы сталкивались с похожей ситуацией?

Любопытно, что...

...древние греки различали два вида движения — естественное и насильственное. Сегодня под естественным движением, происходящим без приложения сил, подразумевается инерционное движение по прямой. Однако античные ученые считали, что такое движение должно быть вечным и неизменным только в «надлунном мире», т.е. круговым и равномерным движением небесных светил.

...Ньютон, называвший инерцию «врожденной силой материи», растолковывает этот термин только как «свойство», не мысля ее в качестве реальной физической силы. Внешнюю, приложенную к телу силу он именуется «другой силой». Разъяснение потребовалось из-за неопределенности понятия о силе в XVII и XVIII веках, когда ее значения порой не имели ничего общего с современным, введенным именно Ньютоном, пониманием силы.

...Генрих Герц, неудовлетворенный построениями Галилея и Ньютона, создал свою, так называемую бессильную механику, правда, не принятую научным сообществом. Из нее вытекало, например, что закон инерции справедлив в случае его приложения ко Вселенной в целом, что существует «мировой эфир», обладающий свойствами обычной инертной материи, и что движение планет вокруг Солнца можно объяснить инерцией без привлечения действия сил.

...понятие момента инерции, отвечающего за инертность тела при вращении, было введено в начале XVIII века при разработке теории маятника такими знаменитостями, как Якоб Бернулли и Христиан Гюйгенс.

...изменение периода колебаний маятника при перемещении по земной поверхности Христиан Гюйгенс объяснил вращением Земли, приводящим к ее сплюснутости у полюсов и вздутиям у экватора. Для подтверждения он привел в быстрое вращение шар из мягкой глины, надетый на ось, и наблюдал его сплющивание. Этот опыт, кстати, заметно повлиял на космогонические взгляды Иммануила Канта и Пьера Лапласа, разработавших гипотезы происхождения Солнечной системы.

...очень быстрое вращение Юпитера — один оборот за 10 часов — приводит к сильной его сплюснутости у полюсов. Луна, совершая один оборот вокруг своей оси за целый месяц, напротив, практически не сплюснута.

...самый древний на Земле маховик, обнаруженный при археологических раскопках, был изготовлен пять с половиной тысяч лет назад. Это был гончарный круг — массивный диск из обожженной глины диаметром около метра и с круглым отверстием в центре. После раскрутки диск некоторое время вращался, расходуя накопленную энергию, т.е. исполнял роль маховика.

...еще в 1791 году русский механик Иван Кулибин изобрел «самокатку» с маховиком, сглаживающим неравномерность ее движения. А в 1860 году русским инженером Карлом Шуберским был разработан «маховоз», представлявший собой железнодорожную платформу с громадными маховиками в сотни пудов. Разгоняясь на горизонтальных участках и спусках, вращающиеся маховики потом помогали своей инерцией поезду преодолевать достаточно крутые подъемы.

...две роли массы — как меры инертности и «гравитационного заряда» — изучал еще Ньютон, проводя опыты с маятниками. Период маятника, по его данным, не зависел от веса груза, как и должно было быть в случае равенства инертной и гравитационной масс тел. Тождественность понятий инерции и тяготения была затем возведена в ранг фундаментального принципа физики и легла в основу общей теории относительности Эйнштейна.

...примерно сто лет назад была выполнена серия экспериментов по выявлению носителей заряда в металлах. При внезапной остановке проводника свободные заряды в нем короткое время двигались по инерции, создавая импульс тока. Его направление и показало, что переносчиками заряда являются электроны.

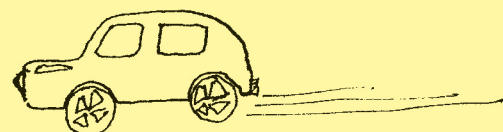
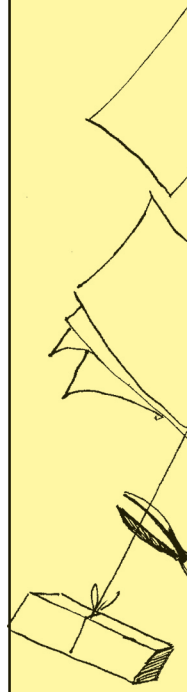
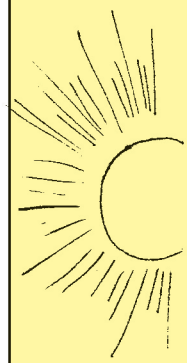
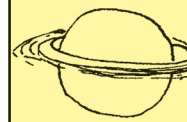
...фотоны, не имея массы покоя, обладают инерцией. Так, они притягиваются к другим телам: пролетая мимо Солнца и звезд, поворачиваются, создавая космические миражи, или, летя к Земле, увеличивают свою энергию, что сказывается на изменении их частоты. Но остановить, замедлить либо ускорить фотоны, увы, нельзя.

Что читать в «Кванте» об инерции

(публикации последних лет)

1. «Физика внутри автобуса» — 2006, №1, с.27;
2. «Физика в «Рассказах о животных» — 2008, №4, с. 31;
3. «Обтекание вращающихся тел» — 2010, №2, с.49;
4. «Физический калейдоскоп. Выпуск 3» — 2012, Приложение №3, с.11, 16,126;
5. «Мог ли Галилей открыть закон всемирного тяготения» — 2013, №2, с.16;
6. «Прекрасные моменты физики» — 2013, №5-6, с.31.

Материал подготовил А.Леонович



Тайна лунных недр

И. АКУЛИЧ

...внутри земного шара имеется другой шар, значительно больше наружного.

Я. Гашек. Похождения бравого солдата Швейка

КАК-ТО В СОЛНЕЧНОМ ГОРОДЕ СОСТОЯЛСЯ ЖАРКИЙ диспут между известным ученым Знайкой и профессором Звездочкиным (подробности – в романе-сказке Н. Носова «Незнайка на Луне»). Спор шел о строении Луны. Знайка утверждал, что Луна – это полый шар, вроде резинового мяча. По мнению же Звездочкина, Луна – это шар, внутри которого имеется другой шар, окруженный прослойкой из воздуха или какого-нибудь другого газа (иначе говоря, это оболочка, внутри которой концентрично с ней расположен внутренний шар).

Впоследствии Незнайка угнал космический корабль и убедился в правоте профессора, проникнув на поверхность внутреннего шара и обнаружив, что условия там практически точь-в-точь такие же, как на нашей матушке-Земле (только освещение вместо Солнца обеспечивала внутренняя поверхность оболочки, испускавшая свет под действием космических излучений).

Оказывается, если принять симпатичную модель Звездочкина за истину, то это дает нам все основания сделать вывод о существовании на Луне неизвестных нам веществ, возможно с весьма ценными свойствами. И вот какие соображения наводят на такую мысль.

Если бы радиус внутреннего шара был близок к радиусу оболочки, то ускорения силы тяжести, создаваемой шаром на его собственной поверхности и на поверхности оболочки, были бы близки между собой. Но мы-то знаем, что на поверхности Луны это ускорение в шесть раз меньше, чем на поверхности Земли. А на поверхности внутреннего шара оно, как убедился Незнайка, совпадает с земным. Следовательно, радиус шара должен быть существенно меньше, чем радиус оболочки. А тогда для создания на его поверхности ускорения, равного земному, средняя плотность шара должна многократно превосходить среднюю плотность Земли, которая, согласно справочникам, близка к $5,5 \text{ г/см}^3$.

Давайте оценим минимально возможную среднюю плотность внутреннего лунного шара. Введем следующие обозначения: $R_0 = 1700 \text{ км} = 1,7 \cdot 10^6 \text{ м}$ – наружный радиус оболочки Луны (по справочнику); $R_{\text{ш}}$ – радиус внутреннего шара; d – толщина оболочки; ρ_0 – средняя плотность вещества оболочки; $\rho_{\text{ш}}$ – средняя плотность вещества шара; $g_{\text{ш}} = 9,8 \text{ м/с}^2$ – ускорение силы тяжести на поверхности шара (как на Земле); $g_0 = g_{\text{ш}}/6$ – ускорение силы тяжести на поверхности оболочки.

Как известно из закона всемирного тяготения, шар радиусом r и плотностью ρ создает на расстоянии $R \geq r$ от его центра ускорение поля тяготения, равное

$$a = \frac{GM}{R^2} = \frac{4}{3} \pi G \rho \frac{r^3}{R^2}, \quad (1)$$

где $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)$ – гравитационная постоянная,

$M = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$ – масса шара. В частности, на поверхности шара, при $R = r$, это ускорение равно

$$g = \frac{4}{3} \pi G \rho r. \quad (2)$$

Тогда для внутреннего лунного шара получаем

$$g_{\text{ш}} = \frac{4}{3} \pi G \rho_{\text{ш}} R_{\text{ш}} \quad (3)$$

(поскольку сферическая оболочка не создает внутри себя гравитационного поля).

На поверхности Луны ускорение силы тяжести равно сумме ускорений от действия двух гравитационных полей, создаваемых шаром и оболочкой (тяготением, создаваемым массой газовой прослойки между оболочкой и шаром, конечно, можно пренебречь). С шаром вопросов нет, а для определения действия оболочки надо либо найти массу оболочки (учитывая ее толщину d), либо просто представить создаваемое ею ускорение как разность ускорений, создаваемых двумя шарами – радиусами R_0 и $(R_0 - d)$. Тогда, используя формулы (1) и (2), можно записать

$$g_0 = \left(\frac{4}{3} \pi G \rho_0 R_0 - \frac{4}{3} \pi G \rho_0 \frac{(R_0 - d)^3}{R_0^2} \right) + \frac{4}{3} \pi G \rho_{\text{ш}} \frac{R_{\text{ш}}^3}{R_0^2}. \quad (4)$$

Здесь слагаемое в скобках – это ускорение, создаваемое оболочкой (представленное, как было сказано, в виде разности), а второе слагаемое – это ускорение, создаваемое шаром. Так как $g_0 = \frac{1}{6} g_{\text{ш}}$, то из равенств (3) и (4) следует

$$\frac{4}{3} \pi G \rho_0 R_0 - \frac{4}{3} \pi G \rho_0 \frac{(R_0 - d)^3}{R_0^2} + \frac{4}{3} \pi G \rho_{\text{ш}} \frac{R_{\text{ш}}^3}{R_0^2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{3} \pi G \rho_{\text{ш}} R_{\text{ш}}.$$

Сократив на $\frac{4}{3} \pi G$ и поделив обе части равенства на $\rho_{\text{ш}} R_0$, получаем

$$\frac{\rho_0}{\rho_{\text{ш}}} - \frac{\rho_0}{\rho_{\text{ш}}} \left(\frac{R_0 - d}{R_0} \right)^3 + \left(\frac{R_{\text{ш}}}{R_0} \right)^3 = \frac{1}{6} \frac{R_{\text{ш}}}{R_0},$$

или

$$\left(\frac{R_{\text{ш}}}{R_0} \right)^3 - \frac{1}{6} \frac{R_{\text{ш}}}{R_0} + \frac{\rho_0}{\rho_{\text{ш}}} \left(1 - \left(\frac{R_0 - d}{R_0} \right)^3 \right) = 0.$$

Отсюда можно найти максимально возможное значение $R_{\text{ш}}$. Обозначим $x = \frac{R_{\text{ш}}}{R_0}$ (очевидно, $0 < x < 1$) и

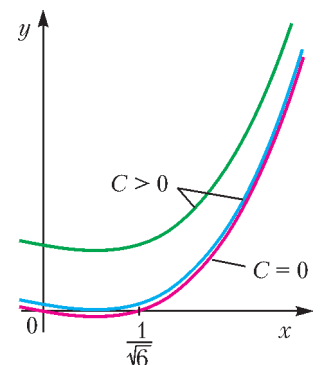
$C = \frac{\rho_0}{\rho_{\text{ш}}} \left(1 - \left(\frac{R_0 - d}{R_0} \right)^3 \right)$ (понятно, что $C > 0$). Тогда имеем

$$x^3 - \frac{1}{6} x + C = 0.$$

Какие значения может принимать решение этого уравнения на интервале $(0; 1)$ при различных положительных значениях параметра C ? Для ответа на этот вопрос изобразим график функции

$$y = x^3 - \frac{1}{6} x + C$$

сначала при $C = 0$, в затем –



при некоторых $C > 0$ (см. рисунок). Легко подсчитать, что при $C = 0$ имеется 2 корня: $x = 0$ и $x = \frac{1}{\sqrt{6}}$. Далее с ростом C корни, как видно, начинают сближаться (большой – уменьшается, меньший – увеличивается), затем при некотором значении C они сольются (график коснется оси абсцисс), а при последующих значениях C корней вообще не будет (но эту возможность мы не рассматриваем, поскольку корень *должен* существовать – приключения Незнайки тому подтверждение!). Отсюда можно сделать такой вывод:

поскольку $C > 0$, то в любом случае $x < \frac{1}{\sqrt{6}}$.

Тогда

$$R_{\text{ш}} = xR_0 < \frac{R_0}{\sqrt{6}} = \frac{1,7 \cdot 10^6 \text{ м}}{\sqrt{6}} = 0,7 \cdot 10^6 \text{ м}.$$

Теперь из уравнения (3) можно получить

$$\rho_{\text{ш}} = \frac{3g_{\text{ш}}}{4\pi G R_{\text{ш}}} > \frac{3 \cdot 9,8}{4 \cdot 3,14 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 0,7 \cdot 10^6} \text{ кг/м}^3 = 50,1 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3 = 50,1 \text{ г/см}^3.$$

Итак, плотность внутреннего шара превосходит 50 г/см^3 . На Земле не найдено пока ни одного вещества с такой невероятной плотностью (у самого тяжелого вещества осмия плотность чуть выше $22,5 \text{ г/см}^3$, у остальных еще меньше). Не исключено, что некоторые элементы из самой нижней части таблицы Менделеева и обладают такой плотностью, но они сплошь неустойчивы и «живут», в основном, доли секунды. Луна же существует миллионы лет!

Стало быть, на Луне (точнее – в ее внутреннем шаре) должны присутствовать (и в немалых количествах) неизвестные вещества. Интересно было бы узнать о них подробнее...

Цилиндрическое зеркало-трубка

А.АНДРЕЕВ, А.ПАНОВ

КАКУЮ КАРТИНУ НА ЭКРАНЕ МОЖЕТ СОЗДАТЬ ШИРОКИЙ пучок световых лучей после прохождения внутри цилиндрической трубки?¹ Будем считать, что источник света расположен в центре одного из торцов трубки (рис. 1).

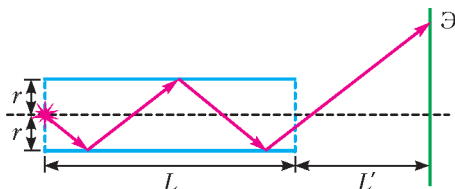


Рис.1. Одиночный луч выходит из центра левого торца трубки и после нескольких отражений попадает на экран

Луч несколько раз отражается от стенок трубки, выходит через другой конец трубки и попадает на экран. Радиус трубки равен r , длина трубки равна L и расстояние от трубки до экрана равно L' . Рисунок 1 показывает, что расчет траектории одного светового луча крайне прост – это всего лишь закон отражения плюс элементарная геометрия. Но нас все-таки интересует не одиночный луч, а общая картина, которую создадут на экране все лучи, выходящие из источника.

Посмотрите на рисунок 2, на котором представлены две фотографии экрана, освещенного пучком света, прошедшим через трубку с внутренним радиусом $r = 4,5$ мм и длиной $L = 350$ мм. Экран располагался на расстояниях $L'_1 = 600$ мм и $L'_2 = 1200$ мм от конца трубки. На экране наблюдается четко выраженная дискретная кольцевая структура.

А вот две такие же картинки, рассчитанные с помощью геометрической оптики, изображены на рисунке 3. Внутри трубки случайным образом «запустились» примерно 10^5

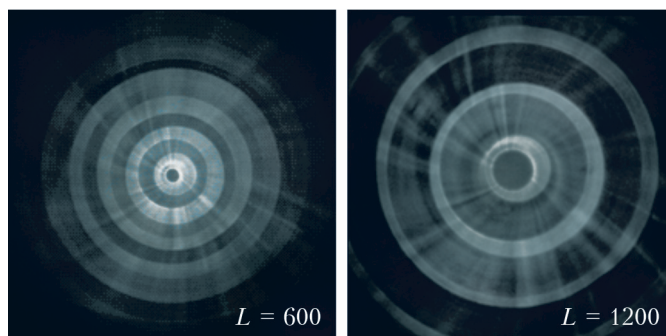


Рис.2. Что видно на экранах, находящихся на разных расстояниях от трубки

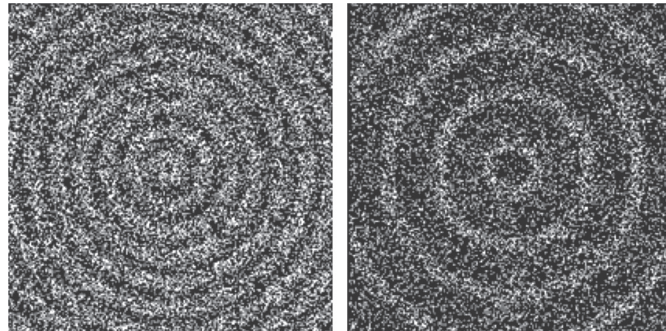


Рис.3. Что дает геометрическая оптика для тех же расстояний до экрана

световых лучей. Для каждого луча рассчитывалась его траектория вплоть до пересечения с экраном, и в месте пересечения на черном экране ставилась белая точка.

Между рисунками 2 и 3 имеется очевидное сходство.

Итак, в каждом случае на картине присутствует дискретная кольцевая структура, а единственный дискретный параметр в нашей задаче – это количество отражений светового луча внутри трубки. Поэтому хорошо бы было понять, какую именно картину формируют на экране лучи с фиксированным числом отражений. Физически такое выделение, может быть, и затруднительно, но в компьютерном эксперименте это делается совсем просто.

Рассмотрим случай $L' = 600$ мм и отдельно посмотрим, что дают лучи с четным числом отражений и что с нечетным. На рисунке 4 слева видно, что лучи с четным числом отражений порождают систему непересекающихся световых колец. Аналогичную систему порождают и лучи с нечетным числом отражений (см. рис. 4 в середине). При этом все

¹ Как происходит отражение узкого светового пучка от внешней поверхности тонкого цилиндра, рассказывается в нашей статье «Отражение от тонких цилиндрических зеркал» в Кванте № 1 за 2009 год.

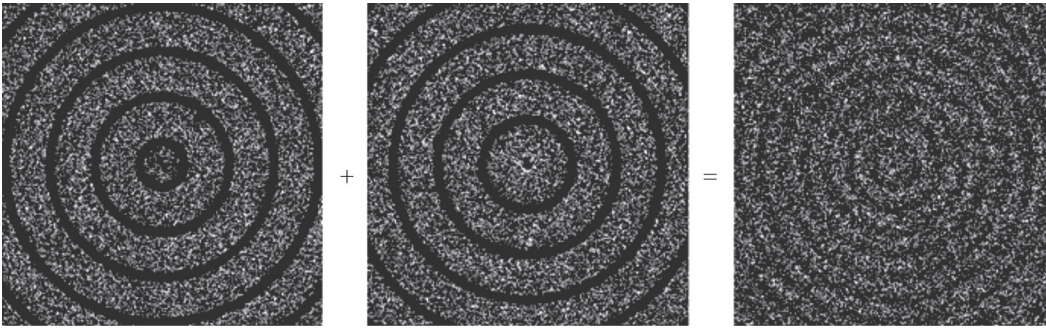


Рис.4. Сложение картин от четного и нечетного числа отражений

световые кольца имеют одинаковую ширину и все промежутки между кольцами тоже одинаковой ширины. Теперь становится понятным, откуда берутся узкие яркие кольца на рисунках 2 и 3 – это просто попарные пересечения соседних колец, порожденных лучами с k и $k + 1$ отражениями (см. рис. 4 справа).

Для правильного понимания общей картины следует рассчитать радиусы колец, сформированных лучами с k отражениями. Начнем с $k = 0$ (рис. 5). Видно, что лучи, не испытывающие отражений внутри трубки, заполняют на

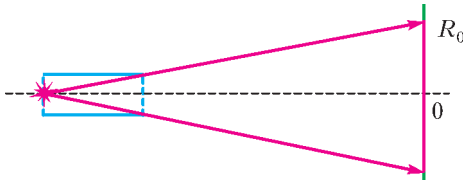


Рис.5. Лучи, не испытавшие ни одного отражения, заполняют на экране круг

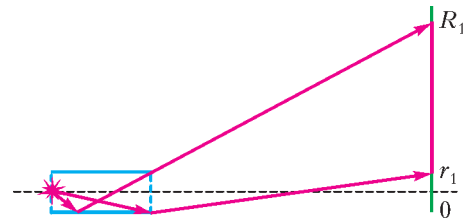


Рис.6. Лучи, отраженные по одному разу, создают на экране светлое кольцо

экране целый круг радиусом R_0 . Сделаем то же самое для лучей, испытавших внутри трубки ровно одно отражение (рис.6). На этот раз лучи заполняют на экране кольцо с радиусами r_1 и R_1 . Мы можем продолжить эти построения и с помощью элементарной геометрии получить нужный результат.

Итак, лучи, испытавшие $k > 0$ отражений, формируют на экране кольцо с внутренним радиусом r_k и внешним радиусом R_k , при этом

$$r_k = \left((2k-1) \frac{L'}{L} - 1 \right) r, \quad R_k = \left((2k+1) \frac{L'}{L} + 1 \right) r.$$

Теперь мы можем вычислить ширину k -го кольца $\Delta = R_k - r_k$ и ширину пересечения соседних колец $\delta = R_k - r_{k+1}$:

$$\Delta = \left(\frac{L'}{L} + 1 \right) \cdot 2r, \quad \delta = 2r.$$

Мы видим, что ширина колец Δ действительно не зависит от k и линейно растет с ростом L' . А ширина пересечения соседних колец δ , она же ширина узких ярких полос на рисунках 2 и 3, и вовсе постоянна – не зависит ни от k , ни от L' и равна диаметру трубки.

Сделаем еще одно замечание. Картина на экране выглядит достаточно простой, когда мы находимся в «дальней зоне», т.е. при $L' > L$ (как на рисунках 2 и 3). В случае же $L' = L$ и система четных колец, и система нечетных колец, каждая по отдельности, заполняют плоскость экрана полностью и без пересечений – в каждую точку экрана попадают ровно два световых луча. Картина усложняется в «ближней зоне», когда $L' < L$. Там ширина колец становится меньше $2r$ и они накладываются друг на друга более сложным образом. Кроме того, величина внутреннего радиуса первого кольца r_1 там отрицательна, а с уменьшением L' внутренние радиусы и других колец тоже становятся отрицательными. Что бы это значило?

Поэкспериментируйте и постарайтесь самостоятельно ответить на этот вопрос.

Зачем «близоруко щуриться»?

А.П.СТАСЕНКО

Кажется, запой у него под самым ухом Патти, напади на Россию полчища китайцев, случись землетрясение, он не пошевелится... и преспокойно будет смотреть прищуренным глазом в свой микроскоп.

А.П.Чехов

ЧАСТО СИМПАТИЧНЫЕ ДЕВУШКИ «БЛИЗОРУКО ЩУРЯТСЯ», чтобы разглядеть и узнать собеседника. Но нигде ни о ком не сказано: «дальнозорко щуриться». Несомненно, в этом различии слов скрыт какой-то физический факт.

Как известно, хрусталик глаза преломляет лучи падающего на него света так, чтобы они сфокусировались на сетчатке (рис.1). У «близорукого» же глаза пересечение лучей происходит до сетчатки (штриховые линии на рисунке 1). Поэтому используется рассеивающая линза, помогающая лучам пересечься на сетчатке глаза, а не до нее (сравните штриховые и сплошные линии на рисунке 2). Но если близорукий человек использует «прищуривание», значит, он достигает того же эффекта, что и при использовании рассеивающей линзы. В чем же тут физика?

А дело в том, что пора перейти от геометрической оптики к волновой. Ведь свет есть электромагнитные волны, важнейшей характеристикой которых является длина волны λ , т.е. расстояние, проходимое волной за один период T со скоростью c :

$$\lambda = cT = \frac{c}{\nu}$$

($\nu = \frac{1}{T}$ – частота волны, измеряемая в обратных секундах, или герцах).

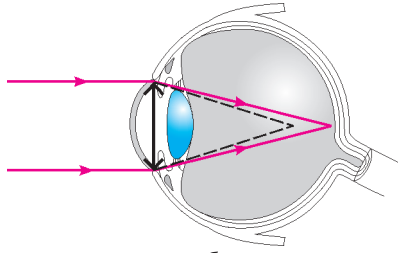


Рис.1. Двойная черная стрелка изображает хрусталик глаза – линзу, собирающую лучи на сетчатке

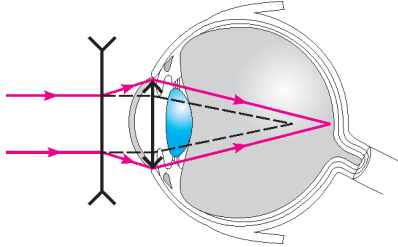


Рис.2. Рассеивающая линза перед глазом «раздвигает» лучи так, что после преломления в хрусталике они фокусируются на сетчатке

Что же произойдет, если волну с плоским бесконечным фронтом заставить пройти через щель шириной d ? Неужели эта щель вырежет кусок плоского фронта и картина будет такой, как на рисунке 3,а? Оказывается, нет. Волна после щели «разбрызгивается» в стороны, как показано на рисунке 3,б. А как оценить угол «разбрызгивания» θ ?

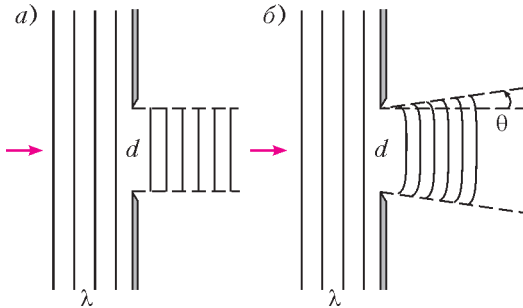


Рис.3. а) Неправильная картина прохождения плоской волны через щель в экране; б) качественно правильная картина

Тут ответ подсказывает всеисильная Теория Размерностей и Подобия: поскольку кроме ширины щели d появилась еще длина волны λ той же размерности (а искомый угол безразмерен), то можно ожидать, что $\theta \sim \lambda/d$. А почему не d/λ ? Да потому, что с увеличением d это «разбрызгивание» становится все менее заметным – вступает в силу геометрическая оптика.

Однако пора признаться, что слово «разбрызгивание» в физике заменено термином «дифракция».

Итак, всякая волна на краях щели в экране дифрагирует, и ее крайние «лучи» отклоняются тем сильнее, чем больше отношение λ/d .

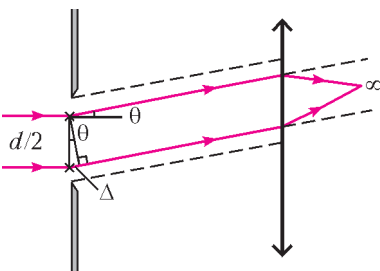


Рис.4. К интерференции лучей от двух полущелей

Но, может быть, вдумчивого Читателя не устраивают соображения размерности? Тогда обратимся к рисунку 4. Тут щель условно представлена в виде двух полущелей – их середины обозначены крестиками и отстоят друг от друга на $d/2$. Согласно прин-

ципу Гюйгенса–Френеля, каждую из полущелей можно представить в виде источника цилиндрической волны. Эти две волны «на бесконечности» (которую можно приблизить при помощи собирающей линзы) встретятся с той же разностью хода $\Delta = \frac{d}{2} \sin \theta$, которую они приобрели в плоскости щели, и будут интерферировать. И что же случится, если эта разность хода будет равна $\lambda/2$? А то, что при этом угле θ волны погасят друг друга и условие погашения будет иметь вид

$$\frac{d}{2} \sin \theta_{\min}^{(1)} = \frac{\lambda}{2}.$$

Понятно, что если длина волны не слишком близка по величине к ширине щели ($\lambda/d \ll 1$), то синус угла приблизительно равен самому углу (в радианах):

$$\theta_{\min}^{(1)} \approx \frac{\lambda}{d},$$

что мы и ожидали на основе теории размерностей.

Но почему тут поставлен верхний индекс (1)? А потому, что это условие погашения реализуется и при других углах $\theta_{\min}^{(n)}$, для которых сдвиг фаз равен нечетному числу полу-волн:

$$\sin \theta_{\min}^{(n)} = (2n - 1) \frac{\lambda}{d}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Так что еще более правильная картина на экране будет выглядеть сложнее, чем на рисунке 3,б (попробуйте ее нарисовать самостоятельно). Угловое распределение интенсивности прошедшего через щель сигнала, или так называемая диаграмма направленности, качественно изображена на рисунке 5. Понятно, что максимумы соответствуют условию

$$\sin \theta_{\max}^{(m)} = m \frac{\lambda}{d}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Надо заметить, что наши рисунки относятся к далеким расстояниям x от щели. А что значит «далеко»? Ведь если к щели, на которую свет падает слева, приложить справа лист бумаги или расположить его совсем близко, то на нем появится резкая полоса без всяких следов дифракции. Значит, существует еще безразмерный параметр, отсчитывающий расстояние от щели в длинах волн: x/λ . Так что полная картина определяется обоими параметрами, а именно величиной

$$p = \frac{d}{\lambda} \cdot \frac{x}{\lambda}.$$

И если p много больше единицы, то к соответствующим значениям x и относятся приведенные картинки. А между $p \gg 1$ и $p \ll 1$ лежит более сложная для описания область, которую можно будет понять, поступив в Московский физико-технический институт.

Но вернемся к прищуриванию. Теперь понятно, что уменьшение ширины щели играет ту же роль, что и использование рассеивающей линзы (см. рис. 2). Не случайно в средние века театральные дамы лорнировали сцену при помощи щелевых очков. Конечно, дифракция происходит и на ресницах прищуренных век, при этом «разбрызгивание» света наблюдается в горизонтальной плоскости. И, конечно, щурятся также просто от яркого света, чтобы уменьшить поток энергии на сетчатку.

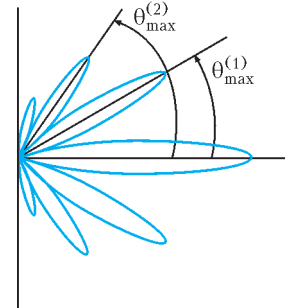


Рис.5. Диаграмма направленности

Кстати, дифракция должна происходить и на входном зрачке любого глаза (он ведь тоже вырезает кусок фронта волны). Значит, параллельные лучи и в самом здоровом глазе соберутся на сетчатке не в точку (как обещает геометрическая оптика), а в кружок, радиус которого приближенно равен

$$r \approx \frac{\lambda}{d} D,$$

где D – диаметр глазного яблока, d – диаметр зрачка.

Природа распорядилась так, что глаз человека имеет наиболее четкое изображение на сетчатке при диаметре зрачка $d = 3$ мм. Это связано с размером светочувствительных клеток. Так называемое желтое пятно, на которое проецируется изображение, выстлано пятнадцатью тыся-

чами колбочек. Это площадка с угловым размером $1,5^\circ \approx 1/40$ рад. Значит, на каждую клетку-колбочку приходится угол

$$\alpha = \frac{1}{40 \sqrt{15000}} \text{ рад} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ рад}.$$

А угол дифракции при $d = 3$ мм равен

$$\theta_{\min}^{(1)} = \frac{\lambda}{d} = \frac{0,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}}{3 \cdot 10^{-3} \text{ м}} \text{ рад} \approx 2 \cdot 10^{-4} \text{ рад},$$

т.е. он того же порядка, что и угол α .

Можно еще раз удивиться, как мудро природа «приладила» друг к другу все эти характерные размеры для условий жизни в лучах Солнца!

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Ортоцентр, середина стороны, точка пересечения касательных и... еще одна точка!

Ю.БЛИНКОВ

В ЭТОЙ СТАТЬЕ БУДЕТ РАССМОТРЕНА СЛЕДУЮЩАЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ КОНСТРУКЦИЯ. Пусть AA_1 и BB_1 – высоты остроугольного¹ неравностороннего треугольника ABC , а ω и ω_1 – окружности, описанные около треугольников ABC и A_1B_1C соответственно, точки O , O_1 – их центры. Пусть ω и ω_1 повторно пересекаются в точке P . Оказывается, эта точка обладает некоторыми интересными свойствами, о которых и пойдет речь ниже.

Основные факты в статье пронумерованы и называются **задачами**, а вспомогательные – **леммами**. Без решений приводятся некоторые известные факты – вспомогательные **утверждения** (свойства ортоцентра, окружностей, гомотегии, симедианы). Кроме того, в тексте есть **упражнения** (некоторые дополнительные свойства рассматриваемой конструкции). Указания к доказательствам вспомогательных утверждений и решениям упражнений приведены в разделе «Ответы, указания, решения» в конце журнала.

Многие из рассматриваемых здесь задач предлагались на различных олимпиадах (иногда формулировки несколько изменены по сравнению с предлагавшимися на олимпиадах), причем некоторые – в качестве сложных. Но если разобраться в конструкции (что и предлагаем сделать читателю!), задачи становятся вполне по силам и «непрофессионалам».

¹ Конечно, факты, аналогичные рассматриваемым в этой заметке, верны и для тупоугольных треугольников.

Итак, рассмотрим свойства точки P . Для начала «свяжем» ее с высотами и серединой стороны. Но прежде сформулируем следующее важное свойство ортоцентра (точки пересечения высот):

Утверждение 1. Точка, симметричная ортоцентру относительно середины стороны AB треугольника ABC , лежит на его описанной окружности и диаметрально противоположна точке C .

Задача 1. Докажите, что точки M (середина AB), H (ортоцентр) и P лежат на одной прямой.

Решение. Так как CH – диаметр окружности ω ($\angle CA_1H = 90^\circ$), то $\angle CPH = 90^\circ$ (рис.1). Таким образом, точка пересечения прямой PH с окружностью ω диаметрально противоположна точке C .

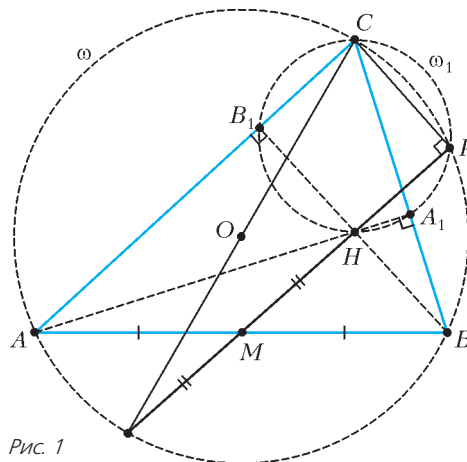


Рис. 1

С другой стороны, точка, симметричная H относительно M , диаметрально противоположна точке C (утверждение 1). Следовательно, прямые PH и MH совпадают, что и требовалось.

Задача 2. а) Окружности, описанные около треугольников AA_1B_1 и BB_1A_1 , проходят через точку P .² б) PM – биссектриса углов APA_1 и BPB_1 . в) Прямая PA проходит через точку, симметричную точке A_1 относительно прямой CH . Докажите эти утверждения.

² Еще несколько свойств этих окружностей предлагаем читателям доказать самостоятельно (упражнения 1 и 3).

Решение. а) Заметим, что $\angle MAA_1 = 90^\circ - \angle ABC = \angle HCA_1 = \angle HPA_1 = \angle MPA_1$ (рис.2), т.е. точки A, M, A_1 и P лежат на одной окружности. Для точек B, M, B_1 и P доказательство аналогично.

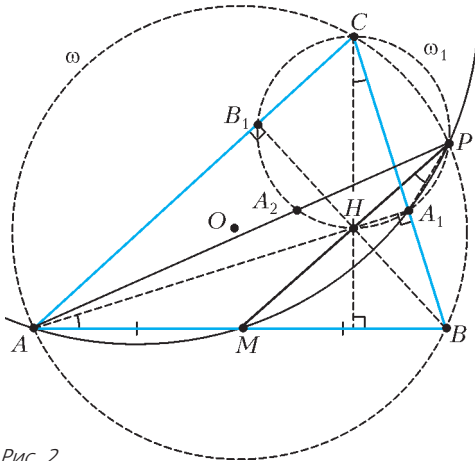


Рис. 2

б) Из а) и равенства $MA = MA_1$ (MA_1 – медиана прямоугольного треугольника ABA_1) следует, что PM – биссектриса $\angle APA_1$.

в) Пусть PA пересекает вторично окружность ω_1 в точке A_2 . Так как PM – биссектриса угла APA_1 , то дуги HA_1 и HA_2 равны, значит A_1 и A_2 симметричны относительно диаметра CH окружности ω_1 .

Упражнение 1. Пусть L_1 и L_2 – вторые точки пересечения окружности, описанной около треугольника AMA_1 , с прямыми BC и AC соответственно, а K_1 и K_2 – вторые точки пересечения окружности, описанной около треугольника BMB_1 , с прямыми AC и BC соответственно. Тогда:

- а) L_1, K_1, M и O лежат на одной прямой;
- б) (Ю.Блинков, Московская устная олимпиада по геометрии, 2011) L_2, K_2, M и O_1 лежат на одной прямой;
- в) L_1, K_1, L_2, K_2 лежат на одной окружности;
- г) прямые L_1L_2, K_1K_2 и PM пересекаются в одной точке.

Для дальнейшего нам понадобится следующее свойство окружностей:

Утверждение 2. Пусть даны три окружности, из которых каждые две пересекаются. Тогда прямые, содержащие их общие хорды, пересекаются в одной точке (эта точка называется радикальным центром данных окружностей) или параллельны.

Добавим в конструкцию прямую A_1B_1 . Пусть прямые A_1B_1 и AB пересекаются в точке S .

Задача 3. Докажите, что точки C, P и S лежат на одной прямой.

Решение. Рассмотрим общие хорды трех окружностей: ω, ω_1 и окружности ω_2 с диаметром AB (рис.3). Прямые AB, A_1B_1 и CP пересекаются в одной точке, откуда следует утверждение задачи.³

Вернемся к нашей конструкции. Проведем медиану CM . Из задачи 3 можно получить, например, такие утверждения, в которых точка P присутствует в «неявном виде».

Упражнение 2 (M2187). Докажите, что прямые SH и CM перпендикулярны.

³ Комментарий для знатоков. Точка P – точка Микеля для прямых AC, BC, AB и A_1B_1 . Прямая CS – полярная точка H относительно окружности ω_2 .

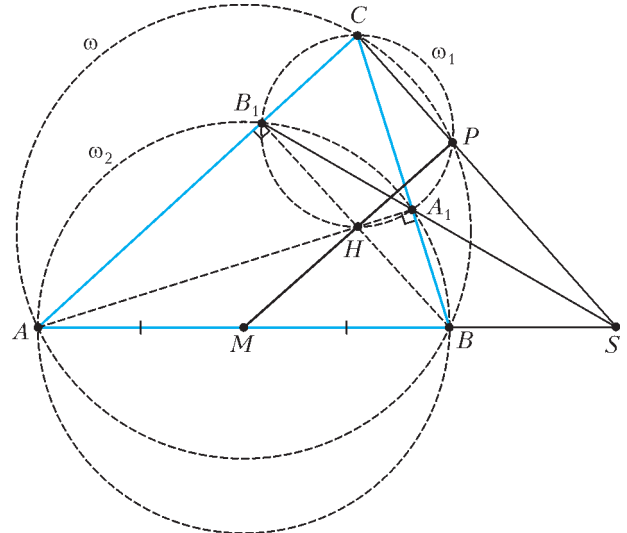


Рис. 3

Задача 4 (Ф.Ивлев, Московская устная олимпиада по геометрии, 2013). Пусть R – середина CM . Докажите, что $OR \perp SC$.

Решение. Заметим, что CP – хорда окружности ω (рис.4), т.е. O лежит на серединном перпендикуляре к отрезку CP . Из задачи 1 следует, что $\angle CPM = 90^\circ$. Поэтому R – середина гипотенузы прямоугольного треугольника CPM , а

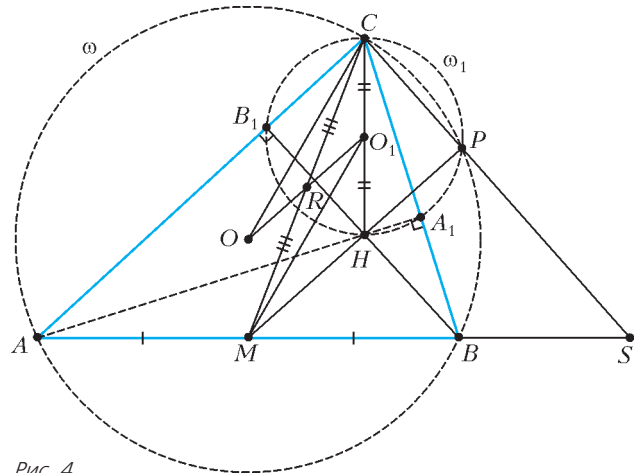


Рис. 4

значит, также лежит на серединном перпендикуляре к отрезку CP . Учитывая, что C, P и S лежат на одной прямой (задача 3), получим требуемое.⁴

Продолжим, добавив в конструкцию касательные к окружности ω . Нам понадобятся дополнительно следующие факты, связанные с высотами:

Утверждение 3. Касательные к описанной окружности треугольника, проведенные через его вершины, параллельны сторонам его ортотреугольника.⁵

Утверждение 4. Ортоцентр треугольника является центром вписанной окружности его ортотреугольника.

⁴ Отметим, что точка R – середина OO_1 . Этот факт следует из того, что OCO_1M – параллелограмм. Отсюда можно получить другой способ решения задачи 4.

⁵ Ортотреугольник – это треугольник с вершинами в основаниях высот.

Пусть касательные, проведенные в точках A и B к окружности ω , пересекают прямую A_1B_1 в точках X и Y соответственно и пересекаются в точке Z (рис.5). Докажем важную для дальнейшего лемму.

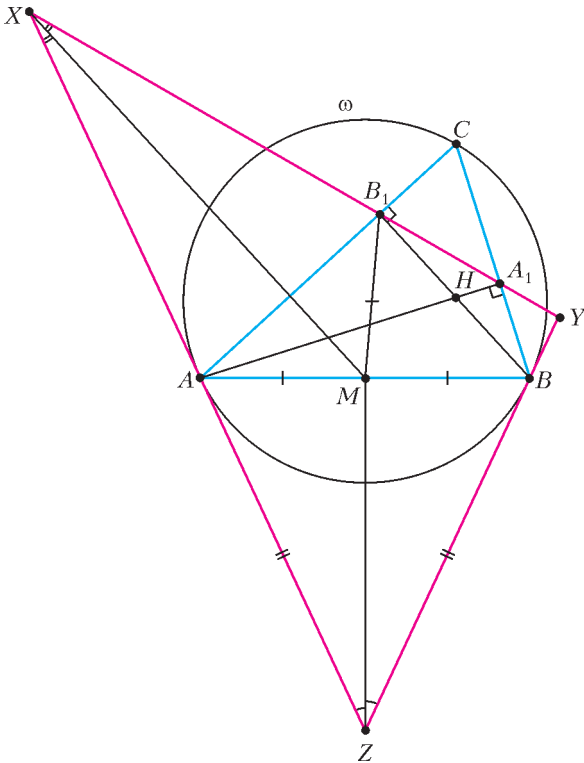


Рис. 5

Лемма 1. M – центр вписанной окружности треугольника XYZ .

Доказательство. 1) Так как $ZA = ZB$, то ZM – биссектриса угла XZY (см. рис.5).

2) Заметим, что $MA = MB_1$, т.е. M лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB_1 . Из касания угол XAC равен углу B , но из утверждения 3 угол XB_1A также равен углу B . Значит, треугольник XAB_1 равнобедренный, и точка X тоже лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB_1 , который является биссектрисой $\angle AXB_1$. Итак, M лежит на биссектрисе $\angle AXB_1$, что и требовалось.

Упражнение 3 (Ю.Блинков, Турнир математических боев имени А.П.Савина, 2011). Докажите, что окружности, описанные около треугольников AMA_1 и BMB_1 , проходят через точки X и Y соответственно.⁶

Далее мы неоднократно встретим треугольники с соответственно параллельными сторонами. Два таких треугольника гомотетичны (т.е. существует центр гомотетии, переводящий один из треугольников в другой), или же существует параллельный перенос, переводящий один из треугольников в другой. Прямые, соединяющие соответствующие вершины двух гомотетичных треугольников, пересекаются в центре гомотетии. Более того, верно следующее:

Утверждение 5. Прямые, соединяющие соответствующие точки (например, точки пересечения высот, биссектрис, медиан и т.д.) двух гомотетичных треугольников, пересекаются в центре гомотетии.

⁶ Можно вначале, используя счет углов, решить упражнение 3 и вывести из него лемму 1.

Упомянутые соображения являются мощным инструментом. Скажем, из утверждений 3, 4, 5 вытекает, что треугольник, образованный касательными, проведенными к ω в точках A, B, C , и ортотреугольник гомотетичны, причем прямая OH (она соединяет центры вписанных окружностей этих треугольников) проходит через центр гомотетии.

Используя вспомогательные утверждения и лемму 1, можно решить, например, следующую непростую задачу.

Упражнение 4 (Ю.Блинков, Турнир математических боев имени А.П.Савина, 2008). Прямые MH , A_1B_1 и ZC_1 пересекаются в одной точке (C_1 – основание высоты из вершины C). Докажите это.

Ну, а что же точка P ? Оказывается, она имеет к данной конструкции самое непосредственное отношение.

Задача 5 (Ю.Зайцева, Московская устная олимпиада по геометрии, 2012). Докажите, что описанные окружности треугольников ABC и XYZ касаются в точке P .

Для решения этой трудной задачи нам опять потребуется вспомнить еще два факта и доказать лемму.

Утверждение 6. Точки H_a, H_b и H_c , симметричные ортоцентру относительно соответствующих сторон треугольника ABC , лежат на его описанной окружности и образуют треугольник, гомотетичный ортотреугольнику.

Утверждение 7 (основное свойство симедианы). Треугольник ABC вписан в окружность. Касательные к окружности, проведенные в точках A и B , пересекаются в точке Z . Тогда прямая CZ содержит симедиану (прямую, симметричную медиане CM относительно биссектрисы угла C) треугольника ABC .

Лемма 2. Точки Z, P и H_c лежат на одной прямой.

Доказательство. Согласно основному свойству симедианы, PZ – симедиана треугольника PAB . Остается понять, что H_c также лежит на симедиане. Ясно, что точка H' из утверждения 1 (симметричная H относительно M) симметрична точке H_c относительно серединного перпендикуляра к AB (рис.6). Тогда дуги AH' и BH_c равны, поэтому прямые PH' (медиана) и PH_c симметричны относительно биссектрисы угла APB . Лемма доказана.

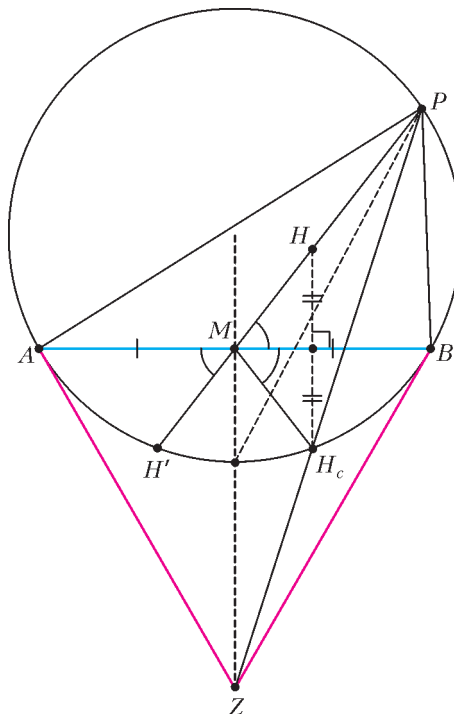


Рис. 6

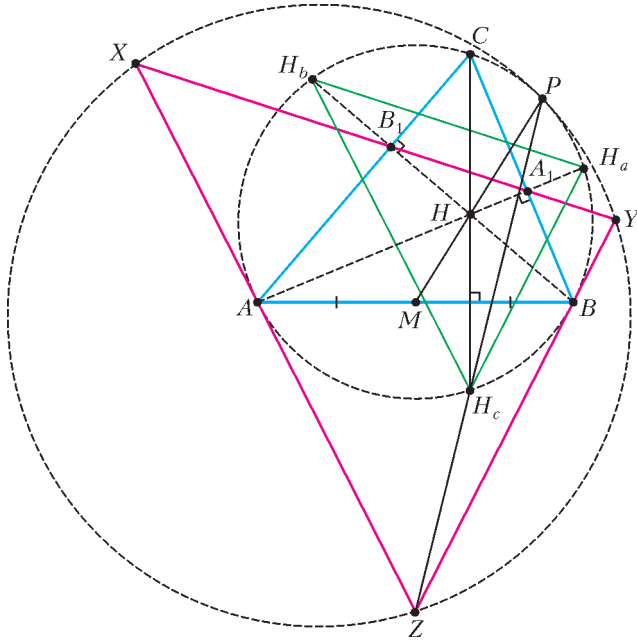


Рис. 7

Решение задачи 5. Так как P принадлежит первой из окружностей, то достаточно доказать, что P – центр гомотетии, переводящей первую окружность во вторую. Рассмотрим треугольники YXZ и $H_aH_bH_c$ (рис.7). Заметим, что:

- 1) H – центр вписанной окружности треугольника $H_aH_bH_c$;
- 2) треугольники YXZ и $H_aH_bH_c$ гомотетичны;
- 3) так как треугольник $H_aH_bH_c$ вписан в окружность, описанную около треугольника ABC , то при этой гомотетии окружности перейдут друг в друга;
- 4) из леммы 1 и предыдущих пунктов следует, что центр гомотетии лежит на прямых MH и ZH_c , т.е. на их пересечении. Учитывая лемму 2, получаем, что центр гомотетии совпадает с P , что и требуется.⁷

И, наконец, последнее. В упражнении 4 была рассмотрена прямая ZC_1 . Через точку P , в отличие от прямой ZH_c , она не проходит, но зато верно следующее утверждение, похожее на упражнение 4.

Задача 6 (Ю.Блинков, Московская устная олимпиада по геометрии, 2011). *Прямые AP , BC и ZC_1 пересекаются в одной точке. Докажите это.*

Решение. Пусть A_2 – точка, симметричная A_1 относительно высоты CC_1 (рис.8). Согласно задаче 2 и утверждению 4, A_2 лежит на прямых AP , B_1C_1 и на окружности ω_1 .

Вспомним, что $B_1C_1 \parallel AZ$; $A_1C_1 \parallel BZ$ (утверждение 3). Кроме того, $A_2A_1 \parallel AB$ (обе прямые перпендикулярны высоте) (рис.9). Таким образом, у равнобедренных треугольников A_2ZB и $A_2C_1A_1$ соответствующие стороны параллельны, следовательно, эти треугольники гомотетичны, причем центр гомотетии лежит на пересечении прямых AA_2 , BA_1 и ZC_1 .

⁷ Возможен и другой способ решения задачи 5 – через свойства полувписанной окружности (см. http://problems.ru/view_problem_details_new.php?id=116754)

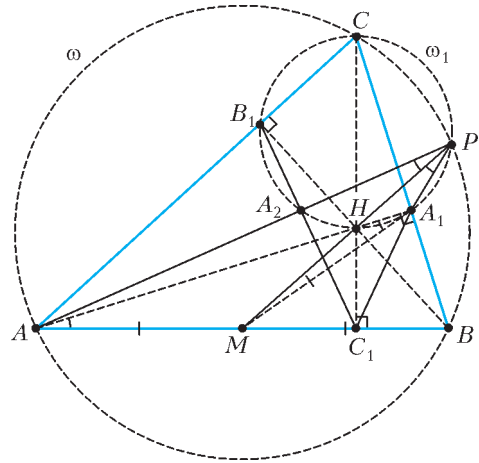


Рис. 8

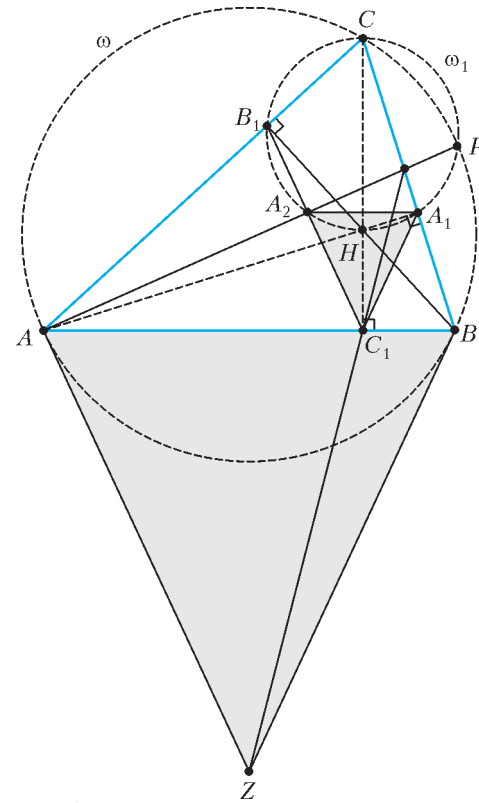


Рис. 9

Следовательно, прямые AP , BC и ZC_1 пересекаются в одной точке.⁸

Автор благодарен П.А.Кожевникову за ценные замечания, способствовавшие существенному улучшению текста статьи, А.Д.Блинкову за полезные обсуждения и Е.С.Горской за выполнение эскизов рисунков.

⁸ Раздаточный материал кружкового занятия по этой статье доступен на http://geometry.ru/persons/blinkov_yura/tochka_P.pdf

Когда помогают графики

М. БОНДАРОВ

ЭТА СТАТЬЯ ПОСВЯЩЕНА РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НА ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ РАВНОУСКОРЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ. Довольно часто их можно встретить в заданиях ЕГЭ и олимпиад различного уровня. Обычно в авторских решениях подобных задач преобладает аналитический подход. При этом используются либо только две основные формулы:

$$v_x = v_{0x} + a_x t,$$

$$s_x = v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2},$$

либо добавляются к ним еще две вспомогательные:

$$v_x^2 - v_{0x}^2 = 2a_x s_x,$$

$$s_x = \frac{v_{0x} + v_x}{2} t.$$

Этих формул достаточно для решения любой задачи на данную тему.¹ Здесь же будет рассказано о способе, который представляется незаслуженно редко используемым: решение задач с помощью графика зависимости скорости от времени.

Основная идея графического метода достаточно проста: для определения пройденного пути нужно найти численно равную ему площадь под графиком скорости. При этом во многих случаях определить геометрически указанную площадь (тем самым, решить задачу или существенно продвинуться в ее решении) оказывается значительно легче, чем вычислить искомое расстояние аналитически. Напомним, что к вопросам использования графиков в различных ситуациях журнал «Квант» обращался неоднократно.²

Особенно полезным графический метод оказывается при решении задач на равноускоренное движение без начальной скорости, например при свободном падении тел. Посмотрим, как график позволит нам выявить некоторые важные особенности такого движения. Для этого на листочке изобразим график зависимости скорости тела от времени (рис. 1). Выберем удобный масштаб (каждая клетка – 1 секунда по горизонтали, хотя можно было бы взять любой другой промежуток времени) и удобный наклон прямой (45° к горизонтальной оси). Выделим желтым цветом треугольник под графиком с основанием, равным одной клетке. Его площадь численно равна пути s_1 , пройденному телом за первую секунду. Сразу бросается в глаза важная закономерность:

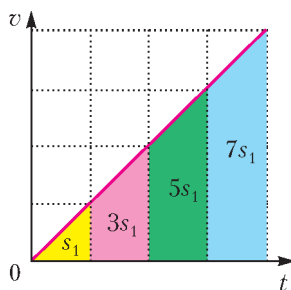


Рис. 1

Для этого на листочке изобразим график зависимости скорости тела от времени (рис. 1). Выберем удобный масштаб (каждая клетка – 1 секунда по горизонтали, хотя можно было бы взять любой другой промежуток времени) и удобный наклон прямой (45° к горизонтальной оси). Выделим желтым цветом треугольник под графиком с основанием, равным одной клетке. Его площадь численно равна пути s_1 , пройденному телом за первую секунду. Сразу бросается в глаза важная закономерность:

¹ См., например, статью А. Черноуцана «Равноускоренное движение по прямой» («Квант» №1 за 2011 г.).

² Отметим лишь две публикации: статью В. Бодика и И. Стрешинского «О графическом способе решения некоторых физических задач» («Квант» №4 за 1987 г.) и статью Б. Мукушева «Метод графических оценок» («Квант» №12 за 1989 г.).

путь, пройденный телом за вторую секунду движения (выделено красным цветом), втрое больше пути s_1 , а за третью секунду (выделено зеленым) – равен $5s_1$ и т.д. Таким образом, график вывел нас на так называемый закон нечетных чисел:

в равноускоренном движении без начальной скорости перемещения, совершенные телом за последовательные равные промежутки времени, относятся как последовательный ряд нечетных чисел.

Легко рассчитать, что свободно падающее тело за первую секунду падения проходит путь, равный 5 м (полезно запомнить!). Зная это, можно быстро найти путь, пройденный этим телом за любую секунду. Например, за пятую секунду свободного падения тело проходит путь $s_{4-5} = 9s_1 = 45$ м.

Рассмотрим более подробно, как применяется закон нечетных чисел на примере задач из ЕГЭ разных лет. Напомним, что задачи уровня А не нужно сопровождать пояснениями, поэтому для их решения подойдет любой способ. Ясно, что особенно хорош тот прием, который позволяет прийти к верному ответу быстрее. В задачах уровня С необходимо представить полное решение, поэтому, используя график, надо обязательно пояснить, каким образом с его помощью получен верный ответ. Однако, даже если вы решали задачу аналитически, с помощью графика можно быстро убедиться в верности вашего решения или обнаружить возможную ошибку. Чтобы нагляднее продемонстрировать преимущества графического метода, некоторые задачи будем решать двумя способами.

Задача 1. Тело, свободно падающее с некоторой высоты без начальной скорости, за время $\tau = 1$ с после начала движения проходит путь в $n = 5$ раз меньший, чем за такой же промежуток времени в конце движения. Найдите полное время движения тела.

Аналитический способ решения. За время τ в начале движения тело проходит путь

$$s_1 = \frac{g\tau^2}{2}.$$

За то же время в конце падения пройденный путь равен

$$s = \frac{gt^2}{2} - \frac{g(t-\tau)^2}{2},$$

где t – полное время движения. По условию,

$$s = ns_1.$$

Тогда получаем

$$\frac{gt^2}{2} - \frac{g(t-\tau)^2}{2} = n \frac{g\tau^2}{2}.$$

После несложных преобразований находим

$$t = \frac{n+1}{2} \tau = 3 \text{ с}.$$

Графический способ решения. Посмотрим на график зависимости скорости тела от времени (см. рис.1). Из него ответ получается мгновенно: поскольку путь, пройденный свободно падающим телом за первую секунду движения, в 5 раз меньше пути, пройденного за последнюю секунду, то полное время движения в три раза больше времени $\tau = 1$ с, т.е. $t = 3$ с.

Задача 2. Тело, падающее без начальной скорости, за последнюю секунду падения прошло путь $s^* = 35$ м. Какую скорость имело тело в момент падения на землю? Спротивлением воздуха пренебречь.

Аналитический способ решения. Выразим путь s^* как разность путей, пройденных телом за все время падения t и

за время $(t - \tau)$, где $\tau = 1$ с:

$$s^* = \frac{gt^2}{2} - \frac{g(t - \tau)^2}{2}.$$

После раскрытия скобок и других преобразований определим время падения:

$$t = \frac{s^*}{g\tau} + \frac{\tau}{2}.$$

Тогда скорость тела в момент падения равна

$$v = gt = \frac{s^*}{\tau} + \frac{g\tau}{2} = 40 \text{ м/с}.$$

Графический способ решения. Заметим, что путь s^* в 7 раз больше пути $s_1 = 5$ м, пройденного за первую секунду падения. Из графика (см. рис.1) видно, что общее время падения равно 4 с, поэтому искомая скорость равна $v = 40$ м/с.

Задачу можно решить и без использования закона нечетных чисел. Из условия легко находится средняя скорость тела на последнем участке:

$$v_{\text{cp}} = \frac{s^*}{t} = 35 \text{ м/с}.$$

На графике зависимости $v(t)$ эта скорость является средней линией трапеции. Тогда искомая скорость равна

$$v = v_{\text{cp}} + g \frac{\tau}{2} = 40 \text{ м/с}.$$

Задача 3. Свободно падающее тело в последние $\tau = 10$ с своего движения проходит $3/4$ всего пути. Определите высоту, с которой падало тело без начальной скорости.

Аналитический способ решения. За все время падения t тело проходит путь

$$s = \frac{gt^2}{2},$$

за время $(t - \tau)$ –

$$\frac{1}{4}s = \frac{g(t - \tau)^2}{2}.$$

Подставив s из первого уравнения во второе, получим

$$\frac{1}{4} \frac{gt^2}{2} = \frac{g(t - \tau)^2}{2},$$

откуда находим

$$t = 2\tau.$$

Тогда искомая высота равна

$$s = \frac{g(2\tau)^2}{2} = 2000 \text{ м}.$$

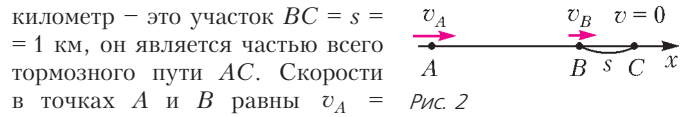
Графический способ решения. Разобьем весь путь s на два участка: начальный – длиной $s/4$ и конечный – длиной $3s/4$. Обратите внимание, что их пути относятся как 1:3. Из графика зависимости $v(t)$ следует, что промежутки времени, необходимые для прохождения этих участков, должны быть одинаковыми, т.е. общее время падения тела t равно 20 с. Следовательно, искомая высота равна

$$h = \frac{gt^2}{2} = \frac{10 \text{ м/с}^2 \cdot 20^2 \text{ с}^2}{2} = 2000 \text{ м}.$$

Задача 4. На последнем километре тормозного пути скорость поезда при торможении с постоянным ускорением уменьшилась на 10 м/с. Определите время торможения, если скорость в начале тормозного пути была 72 км/ч.

Заметим, что торможение тела легко заменить на его разгон.

Аналитический способ решения. Пусть поезд начал тормозить в точке A , а остановился в точке C (рис.2). Последний



километр – это участок $BC = s = 1$ км, он является частью всего тормозного пути AC . Скорости в точках A и B равны $v_A = 72 \text{ км/ч} = 20 \text{ м/с}$ и $v_B = 10 \text{ м/с}$. Обозначим через a модуль ускорения поезда. Требуется найти время движения t на участке AC . Имеем

$$v_A = at,$$

$$v_B^2 = 2as.$$

Выразив a из первого уравнения и подставив во второе, получим

$$t = \frac{2sv_A}{v_B^2} = 400 \text{ с}.$$

Графический способ решения. Изобразим график скорости поезда с учетом числовых данных задачи (рис.3). При этом масштаб по оси времени можно выбрать произвольно из соображений удобства – построив, например, равнобедренный треугольник.

Из графика сразу видно, что выделенная зеленая площадь (по условию численно равная 1 км) в четыре раза меньше площади большого треугольника (численно равной всему тормозному пути). Зная площадь S и высоту v треугольника, определяем его основание t :

$$S = \frac{vt}{2}, \text{ откуда } t = \frac{2S}{v} = \frac{2 \cdot 4000 \text{ м}}{20 \text{ м/с}} = 400 \text{ с}.$$

Задача 5. За пятую секунду прямолинейного движения с постоянным ускорением тело проходит путь $s = 5$ м и останавливается. Какой путь s_{1-2} проходит тело за вторую секунду этого движения?

Эту задачу будем решать только с помощью графика скорости.

Решение. Построим график зависимости скорости тела от времени (рис.4), выделив на нем цветом площади, численно равные расстояниям, пройденным за вторую и пятую секунды движения. Теперь ответ очевиден:

$$s_{1-2} = 7s = 35 \text{ м}.$$

– Что ж, преимущества графического метода и закона нечетных чисел показаны убедительно! – может заметить критически настроенный читатель.

– Однако хорошо видно, что для решения задач отбирались лишь те, в которых числовые данные в условиях специально подобраны для получения быстрого ответа. Но как быть в тех случаях, когда такого удобного упрощения нет?

Действительно, даже совсем небольшое изменение числовых данных в условии вводит запрет на применение закона нечетных чисел. Например, если в задаче 1 положить $n = 6$, а в задаче 2 считать $s^* = 36$ м, то прийти быстро к ответу не удастся. И все же, вряд ли разумно проходить мимо возможности сразу получить верный ответ в том случае, когда это позволяет условие задачи.

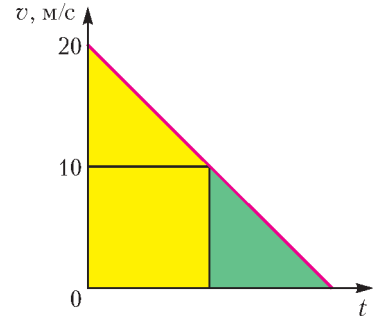


Рис. 3

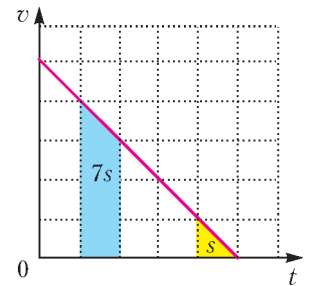


Рис. 4

Что же касается графического способа, то его возможности значительно шире. Покажем это на примере решения нескольких конкретных задач.

Задача 6 (МАИ). В последнюю секунду свободного падения тело прошло путь вдвое больший, чем в предыдущую секунду. С какой высоты падало тело?

Решение. Построим график зависимости скорости от времени и укажем на нем рассматриваемые пути (рис.5). Весь

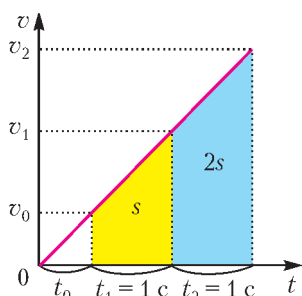


Рис. 5

путь состоит из трех участков, причем продолжительности двух последних из них известны: $t_1 = 1$ с и $t_2 = 1$ с, а длительность первого обозначим t_0 . Тогда скорости тела в конце этих участков равны соответственно

$$v_0 = at_0, \quad v_1 = a(t_0 + t_1), \\ v_2 = a(t_0 + t_1 + t_2).$$

Запишем выражения для путей (численно равных выделенным цветом площадям на рисунке 5), пройденных за каждую из двух последних секунд:

$$s = \frac{v_0 + v_1}{2} t_1 = \frac{at_0 + a(t_0 + t_1)}{2} t_1, \\ 2s = \frac{v_1 + v_2}{2} t_2 = \frac{a(t_0 + t_1) + a(t_0 + t_1 + t_2)}{2} t_2.$$

Подставив s из первого уравнения во второе, получим

$$2 \frac{at_0 + a(t_0 + t_1)}{2} t_1 = \frac{a(t_0 + t_1) + a(t_0 + t_1 + t_2)}{2} t_2,$$

откуда

$$t_0 = \frac{t_2^2 + 2t_1t_2 - 2t_1^2}{2(2t_1 - t_2)} = 0,5 \text{ с}.$$

Теперь легко найти искомую высоту:

$$H = \frac{g(t_0 + t_1 + t_2)^2}{2} \approx 31 \text{ м}.$$

Задача 7. Время отправления электрички по расписанию 12.00. На ваших часах 12.00, но мимо вас уже начинает проезжать предпоследний вагон, который движется мимо вас в течение $t_1 = 10$ с. Последний вагон проходит мимо вас в течение $t_2 = 8$ с. Электричка отправилась вовремя и движется равноускоренно. На какое время отстают ваши часы?

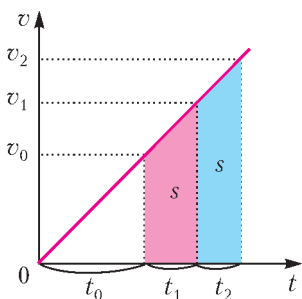


Рис. 6

Решение. Построим график зависимости скорости электрички от времени, отсчитываемого от начала движения (рис.6). Отметим на нем значения скоростей электрички в те моменты времени, когда мимо пассажира проезжает: 1) начало предпоследнего вагона - $v_0 = at_0$; 2) начало последнего вагона -

$v_1 = a(t_0 + t_1)$; 3) конец последнего вагона - $v_2 = a(t_0 + t_1 + t_2)$. Поскольку длины вагонов одинаковые, то выделенные цветом площади трапеций также равны:

$$\frac{at_0 + a(t_0 + t_1)}{2} t_1 = \frac{a(t_0 + t_1) + a(t_0 + t_1 + t_2)}{2} t_2,$$

откуда после несложных преобразований найдем

$$t_0 = \frac{t_2^2 + 2t_1t_2 - t_1^2}{2(t_1 - t_2)} = 31 \text{ с}.$$

Определив время отставания часов, попробуем найти ответ еще на один интересный вопрос: около какого вагона оказался пассажир в момент появления на перроне? Ответить на него несложно, поскольку нам известно общее время движения поезда: $t = 31 \text{ с} + 10 \text{ с} + 8 \text{ с} = 49 \text{ с}$. Тогда легко записать выражение для длины той части поезда, которая равна расстоянию от места расположения пассажира до хвоста поезда:

$$ns = \frac{at^2}{2},$$

где n - число вагонов от хвоста поезда до пассажира. С другой стороны, формулу для расчета длины вагона мы уже использовали:

$$s = \frac{at_0 + a(t_0 + t_1)}{2} t_1.$$

Из двух последних уравнений найдем число вагонов:

$$n = \frac{t^2}{(2t_0 + t_1)t_1} \approx 3,3.$$

Дробный ответ не должен нас смущать. Видимо, пассажир в момент отправления поезда появился из подземного перехода, расположенного напротив четвертого от хвоста поезда вагона.

Задача 8 (МГУ, физфак, 2007). Велосипедист, двигаясь равноускоренно, проезжает мимо четырех столбов, стоящих друг за другом на одинаковом расстоянии. Расстояние между первыми двумя столбами он проехал за время $t_1 = 2$ с, а между вторым и третьим - за $t_2 = 1$ с. Найдите время t_3 движения велосипедиста между третьим и четвертым столбами.

Решение этой задачи осложнено математическими преобразованиями. Мы намеренно не будем решать задачу в общем виде, чтобы избежать громоздких выкладок. Заметим, что при таком способе решения надо быть предельно внимательным, поскольку исчезает возможность обнаружить ошибку с помощью проверки размерности.

Аналитический способ решения. Покажем только основные этапы решения. Пусть расстояние между столбами s , скорость велосипедиста в момент проезда первого столба v_0 , а его ускорение a . Кинематические уравнения имеют вид

$$s = v_0t_1 + \frac{at_1^2}{2}, \\ s = (v_0 + at_1)t_2 + \frac{at_2^2}{2}, \\ s = (v_0 + at_1 + at_2)t_3 + \frac{at_3^2}{2}.$$

Вводя обозначения $t_0 = \frac{2v_0}{a}$ и $\tau = \sqrt{\frac{2s}{a}}$, последнее из этих уравнений приведем к виду

$$t_3^2 + 2\left(t_1 + t_2 + \frac{t_0}{2}\right)t_3 - \tau^2 = 0.$$

Положительный корень этого уравнения равен

$$t_3 = -\left(t_1 + t_2 + \frac{t_0}{2}\right) + \sqrt{\left(t_1 + t_2 + \frac{t_0}{2}\right)^2 + \tau^2}.$$

Чтобы получить ответ, осталось найти t_0 и τ . Для этого воспользуемся первым и вторым кинематическими уравнениями движения велосипедиста (в новых обозначениях):

$$\tau^2 = t_0t_1 + t_1^2, \\ \tau^2 = (t_0 + 2t_1)t_2 + t_2^2.$$

Решая эту систему, находим

$$t_0 = \frac{t_2^2 - t_1^2 + 2t_1 t_2}{t_1 - t_2} = 1 \text{ с},$$

$$t^2 = \frac{(t_1 + t_2)t_1 t_2}{t_1 - t_2} = 6 \text{ с}^2.$$

Следовательно,

$$t_3 = \left(-3,5 + \sqrt{3,5^2 + 6}\right) \text{ с} \approx 0,77 \text{ с}.$$

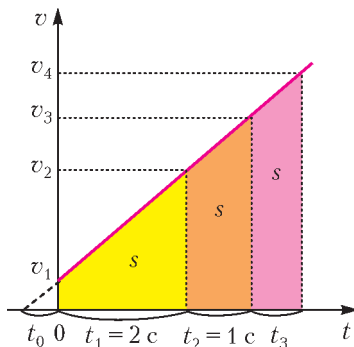


Рис. 7

Графический способ

решения. Изобразим на рисунке 7 график зависимости скорости велосипедиста от времени. Пусть велосипедист начал движение за время t_0 от момента прохождения первого столба. Тогда, двигаясь далее с ускорением a и проезжая мимо первого столба, он имел скорость $v_1 = at_0$, его скорость в момент проезда второго столба была $v_2 = a(t_0 + t_1) = a(t_0 + 2)$, третьего — $v_3 = a(t_0 + t_1 + t_2) = a(t_0 + 3)$ и четвертого — $v_4 = a(t_0 + t_1 + t_2 + t_3) = a(t_0 + 3 + t_3)$. Поскольку площади под графиками скорости численно равны пройденным расстояниям, а расстояния s между столбами по условию одинаковы, можно приравнять площади трех трапеций:

$\frac{a(t_0 + t_0 + 2)}{2} \cdot 2 = \frac{a(t_0 + 2 + t_0 + 3)}{2} \cdot 1 = \frac{a(t_0 + 3 + t_0 + t_3)}{2} \cdot t_3$,

или

$$4t_0 + 4 = 2t_0 + 5 = (2t_0 + 6 + t_3)t_3.$$

Из левого равенства сразу определяем время t_0 от начала движения до момента прохождения первого столба:

$$2t_0 = 1, \text{ откуда } t_0 = 0,5 \text{ с}.$$

После подстановки найденного значения t_0 правое равенство принимает вид

$$t_3^2 + 7t_3 - 6 = 0,$$

откуда легко находим искомое время t_3 движения велосипедиста между третьим и четвертым столбами:

$$t_3 = \frac{1}{2}(\sqrt{73} - 7) \text{ с} \approx 0,77 \text{ с}.$$

В разобранных выше задачах тела двигались все время с постоянным ускорением. Покажем, что графический способ очень удобен и для тех задач, где рассматривается несколько этапов движения. Начнем с классической задачи о движении тела, состоящем из трех этапов: разгона, равномерного движения и торможения.

Задача 9 («МАИ», 2011, олимпиада). *Трамвай прошел расстояние между соседними остановками за $t = 6$ мин, причем в начале он двигался равноускоренно, затем равномерно, а в конце равнозамедленно. На разгон и торможение ушло в общей сложности $\Delta t = 2$ мин, а скорость равномерного движения была $v = 5$ м/с. Определите расстояние между остановками трамвая.*

Аналитический способ решения. Обозначим время разгона трамвая через t_0 . Тогда время торможения равно $\Delta t - t_0$. За время t_0 трамвай пройдет расстояние

$$s_1 = \frac{a_1 t_0^2}{2},$$

где ускорение трамвая на первом этапе равно

$$a_1 = \frac{v}{t_0}.$$

Отсюда получаем

$$s_1 = \frac{v t_0}{2}.$$

Находим далее расстояние, пройденное трамваем при его равномерном движении:

$$s_2 = v(t - \Delta t)$$

и, наконец, расстояние на третьем этапе движения — при его торможении:

$$s_3 = v(\Delta t - t_0) - \frac{a_2 (\Delta t - t_0)^2}{2},$$

где ускорение (по модулю) равно

$$a_2 = \frac{v}{\Delta t - t_0}.$$

Отсюда получаем

$$s_3 = \frac{v(\Delta t - t_0)}{2}.$$

Теперь окончательно находим расстояние между остановками:

$$\begin{aligned} s &= s_1 + s_2 + s_3 = \frac{v t_0}{2} + v(t - \Delta t) + \frac{v(\Delta t - t_0)}{2} = \\ &= \frac{v(2t - \Delta t)}{2} = 1500 \text{ м}. \end{aligned}$$

Графический способ решения. Построим график скорости трамвая (рис. 8), указав на нем данные из условия задачи. Мы не знаем, сколько времени было затрачено на разгон, и сколько — на торможение. К счастью, для ответа на вопрос задачи этого и не требуется, ведь площадь трапеции зависит (при неизменной высоте) лишь от суммы ее оснований. Таким образом, искомое расстояние между остановками численно равно

$$s = v \frac{t + (t - \Delta t)}{2} = 5 \text{ м/с} \frac{360 \text{ с} + 240 \text{ с}}{2} = 1500 \text{ м}.$$

Рассмотрим теперь задачи с разворотом, когда меняется направление движения тела.

Задача 10. *Аэростат поднимается с земли вертикально вверх с ускорением $a = 2$ м/с². Через $t_0 = 5$ с от начала движения аэростата из него выпал предмет. Через сколько времени этот предмет упадет на землю? Начальная скорость аэростата равна нулю.*

Аналитический способ решения. Через время t_0 аэростат и предмет поднимутся на высоту

$$h = \frac{a t_0^2}{2}$$

и приобретут скорость

$$v_0 = a t_0.$$

Далее предмет движется с постоянным ускорением, проекция которого на направленную вверх ось x равна $-g$. Проекция перемещения предмета за все время до падения на

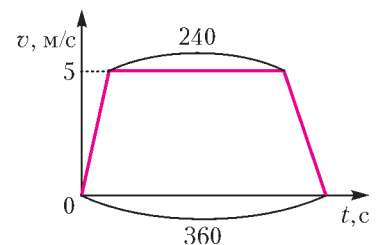


Рис. 8

землю равна $s_x = -h$. Тогда

$$-h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Подставив в это выражение значения h и v_0 , получим квадратное уравнение

$$-\frac{at_0^2}{2} = at_0 t - \frac{gt^2}{2}, \text{ или } \frac{gt^2}{2} - at_0 t - \frac{at_0^2}{2} = 0.$$

Положительный корень этого уравнения равен

$$t = t_0 \frac{a}{g} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{g}{a}} \right) \approx 3,4 \text{ с.}$$

Графический способ решения. Построим график зависимости проекции скорости предмета на вертикальную ось x от времени (рис.9). Здесь t_1 – время самостоятельного полета предмета до верхней точки траектории, t_2 – время его движения от верхней точки до падения на землю. Обратим внимание, что модуль изменения скорости предмета одинаков на промежутках времени t_0 и t_1 . Поэтому

$$at_0 = gt_1, \text{ откуда } t_1 = \frac{a}{g} t_0.$$

Рис. 9

Поскольку выделенные цветом на графике площади одинаковы (модули перемещения предмета вверх и вниз равны), то

$$\frac{1}{2} at_0 (t_0 + t_1) = \frac{1}{2} gt_2^2.$$

Подставив сюда найденное значение t_1 , получим

$$t_2 = t_0 \sqrt{\frac{a}{g} \left(1 + \frac{a}{g} \right)} = t_0 \frac{a}{g} \sqrt{1 + \frac{g}{a}}.$$

Окончательно, искомое время будет равно

$$t = t_1 + t_2 = t_0 \frac{a}{g} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{g}{a}} \right) \approx 3,4 \text{ с.}$$

И в заключение покажем применение графического метода к задачам, немного отличающимся от всех, разобранных выше.

Задача 11. С высоты $H = 30$ м свободно падает стальной шарик. При падении он сталкивается с неподвижной плитой, плоскость которой наклонена под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту, и взлетает на высоту $h = 15$ м над землей. Каково время падения шарика до удара о плиту? Удар шарика о плиту считать абсолютно упругим.

Решение. Сначала изобразим на рисунке 10 траекторию движения шарика и заданные в условии величины. Для определения искомого времени падения шарика до удара о плиту надо знать только расстояние s до нее. За время

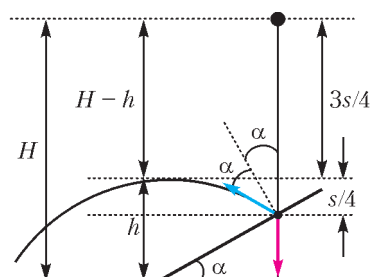


Рис. 10

падения до столкновения с плитой шарик набирает некоторую скорость v_1 . Если бы плита была горизонтальной, то шарик подпрыгнул бы на прежнюю высоту s (поскольку удар абсолютно упругий). Но плоскость плиты в задаче наклонена, значит, высота подъема умень-

шится. Однако наклон этот подобран авторами очень удачно: после отскока вертикальная составляющая скорости уменьшится ровно вдвое (а горизонтальная проекция скорости нас вообще не интересует). Поэтому шарик поднимется вверх на $s/4$ (высота подъема пропорциональна квадрату начальной скорости). Из рисунка 10 следует, что расстояние от земли до точки удара шарика о плиту равно, с одной стороны, $(H - s)$, а с другой – $(h - s/4)$. Для определения s надо решить уравнение

$$30 - s = 15 - \frac{s}{4},$$

откуда получаем $s = 20$ м. А дальше совсем просто: на 20 метров свободно падающее тело опустится за 2 секунды – такие расчеты можно сделать в уме.

График, изображенный на рисунке 11, позволяет представить процессы, описанные в задаче, более наглядно. Выходит, что задачу можно было решить, не прибегая к сложным математическим выкладкам, почти устно!

Задача 12. В ракете находятся математический и пружинный маятники с одинаковым периодом колебаний $T = 1$ с. Ракета начинает движение вертикально вверх с ускорением $a = 10g$. На высоте $h = 5$ км двигатель выключается, и ракета продолжает подниматься до максимальной высоты. Сколько колебаний сделает каждый маятник за время работы двигателя ракеты и за все время подъема? Сопротивлением воздуха и уменьшением силы земного тяготения с высотой пренебречь.

Решение. Время t_0 работы двигателя найти совсем просто:

$$h = \frac{at_0^2}{2}, \text{ откуда } t_0 = \sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{\frac{h}{5g}} = 10 \text{ с.}$$

Использование графика скорости (рис.12) позволит легко найти и общее время t подъема ракеты. Заметим, что после

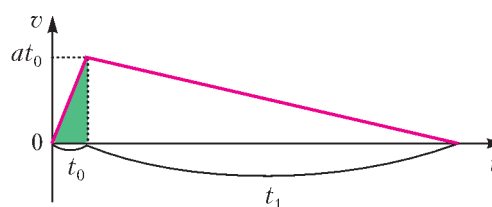


Рис. 12

выключения двигателя ракета движется с ускорением, модуль которого в 10 раз меньше модуля ускорения на участке разгона ракеты, при этом модуль изменения скорости на обоих участках одинаков. Значит, время t_1 торможения ракеты в 10 раз больше времени t_0 ее разгона:

$$t_1 = 10t_0 = 100 \text{ с.}$$

Тогда общее время подъема ракеты равно

$$t = 11t_0 = 110 \text{ с.}$$

Теперь перейдем к особенностям колебаний маятников. Период колебаний пружинного маятника определяется только его внутренними характеристиками – массой m и

(Продолжение см. на с. 56)

Зимние причуды солнечных лучей

(Начало см. на 4-й странице обложки)

...Известно, что радуга – это следствие преломления и внутреннего отражения солнечных лучей в мельчайших капельках воды, парящих в воздухе после дождя. Холодной зимой в воздухе вместо капелек появляются кристаллики льда, которых становится особенно много сразу после резкого похолодания. Эти кристаллики имеют, как правило, форму гексагональных плоских пластинок или призм.

Все знают, как падает лист бумаги. Его падение – это чередующиеся парения и соскальзывания вниз (рис.1), но

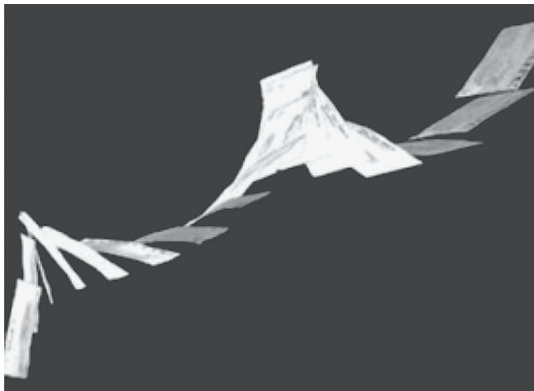


Рис. 1

большую часть времени плоскость листа ориентируется горизонтально. Все плоские легкие предметы ведут себя аналогичным образом, и шестиугольные кристаллики льда тоже – они медленно падают, минимизируя угол между своей плоскостью и горизонталью.

Когда свет от Солнца на пути к нам проходит через пространство, заполненное кристалликами льда, можно наблюдать красивое оптическое явление, называемое солнечным гало (рис.2). Большая часть солнечных лучей, пре-



Рис. 2

ломляясь в призмах ледяных кристалликов, отклоняется на угол около 22° . Поэтому, смотря на Солнце, мы видим его окруженным белым кольцом с угловым диаметром 44° . Легче всего разглядеть гало на рассвете, когда высота Солнца невелика. В этом случае солнечные лучи проходят значительную часть своего пути через облако кристалликов льда. При высоком положении Солнца длина этого

пути становится небольшой. Почти всегда разглядеть гало и одновременно сделать снимок, направляя фотокамеру на Солнце, представляется невозможным. Тогда можно закрыть Солнце каким-нибудь предметом, например рукой.

В ветреную погоду ориентация плоскости кристалликов беспорядочная. Это приводит к тому, что яркость всех участков гало становится одинаковой. В тихую же погоду кристаллики льда парят над землей так, что их плоскости составляют с горизонталью очень малые углы. Поэтому участки гало на горизонтальной прямой, проходящей через Солнце, становятся очень яркими. Народы Арктики, где эти две боковые вспышки гало особенно часто можно было наблюдать, называли их солнечными собаками – за длинные хвосты, идущие в стороны (рис.3).



Рис. 3

Отражение от парящих кристалликов, плоскость которых составляет с горизонталью слегка различные углы, приводит к тому, что мы видим солнечный столб (рис.4). По механизму возникновения это явление очень похоже на солнечную дорожку на слегка волнующейся поверхности моря.

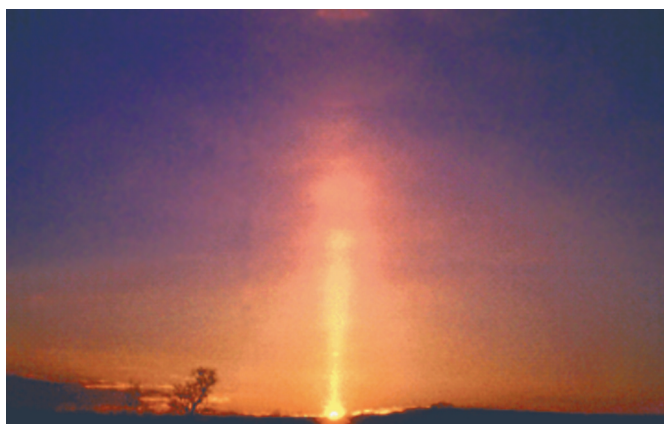


Рис. 4

Почему кристаллы льда отклоняют солнечные лучи на 22° ? Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим ход солнечного луча через кристалл (рис.5). Очевидно, что отклоняться от первоначального направления будут только лучи, попавшие после преломления на грань LM . Поэтому для простоты вычислений можно заменить шестиугольную призму кристаллика льда треугольной призмой с отклоняю-

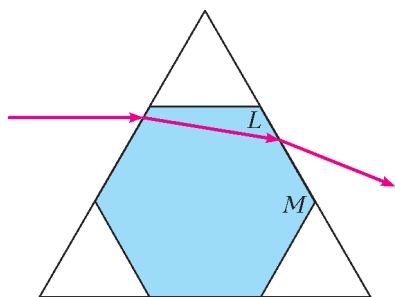


Рис. 5

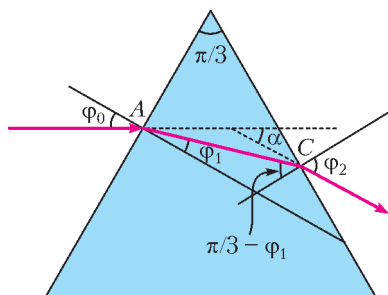


Рис. 6

будет таким:

$$\frac{\sin(\pi/3 - \varphi_1)}{\sin \varphi_2} = \frac{1}{n}.$$

Отсюда при известном угле φ_0 можно вычислить угол преломления φ_2 , а потом – и угол α отклонения луча от

первоначального направления по формуле

$$\frac{\sin \varphi_0}{\sin \varphi_1} = n,$$

где n – показатель преломления льда. Дисперсия льда такова, что для синих лучей $n = 1,314$, а для красных $n = 1,307$, поэтому для расчета можно взять значение $n = 1,31$. Легко показать, что угол падения луча в точке C равен $\pi/3 - \varphi_1$, поэтому соотношение между углом падения луча и его углом преломления φ_2

первоначального направления по формуле

$$\alpha = \varphi_0 + \varphi_2 - \frac{\pi}{3}.$$

Результаты таких вычислений приведены на графике зависимости угла отклонения луча от угла его падения на грань

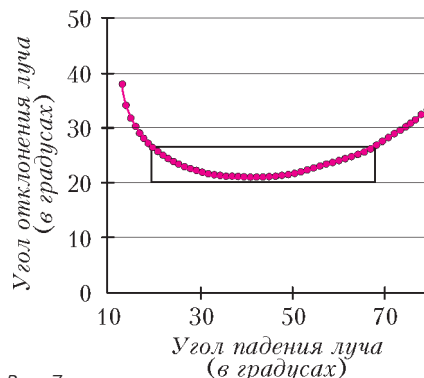


Рис. 7

кристалла льда (рис.7). Из графика следует что угол отклонения луча составляет $22 - 26^\circ$ для лучей, падающих под углами $20 - 70^\circ$. При этом значительная часть лучей, падающих на грань почти отвесно ($< 20^\circ$), не отклоняются, так как выходят из противоположной грани кристалла, а лучи, падающие на кристалл почти касательно к грани, отражаются от него. Поэтому действительно можно считать, что большинство лучей, проходящих через кристалл, отклоняются им на угол около 22° .

К.Богданов

ИНФОРМАЦИЯ

Школьный конкурс РЭШ по экономике

В 2014 году Российская экономическая школа при поддержке Фонда Егора Гайдара, образовательного портала «Экономика для школьников» и НП «Выпускники и друзья РЭШ» проводит (уже в 5-й раз) Школьный конкурс РЭШ по экономике. Конкурс начнется 25 февраля и продлится до 10 апреля, участие в нем бесплатное, приглашаются школьники 8–11 классов.

Мы предлагаем вам только одну из задач конкурса. Если она вам понравится, то полностью задания можно найти на сайте: 2014.iloveconomics.ru

Задача

На лугу пасутся 3 коровы: Ассоль, Бруся и Власта. Рядом расположен загон, в котором коровы питаются сеном. Запас сена в загоне очень большой. К стогу с сеном есть подход только с одной стороны, причем он рассчитан только на одну корову. Когда пастух в 12:00 дает команду о том, что пора подкрепиться, каждая корова принимает стратегическое решение о том, какой по счету она хотела бы есть сено: первой в 12:00 ($t = 1$), второй в 12:20 ($t = 2$) или третьей в 12:40 ($t = 3$). Оказавшись у стога с сеном, корова принимает решение о том, сколько килограммов сена (переменная x) съесть. Если корове никто не мешает, то она ест столько сена, сколько хочет, причем 20 минут ей хватает на прием любого

разумного количества сена. Если несколько коров выбирают один и тот же интервал питания t , то между ними возникает конфликт и они начинают толкаться. В случае если толкаются 2 коровы, то каждая из них сможет схватить не более 12 кг сена, а если толкаются 3 коровы, то каждая полакомится не более чем 5 кг сена. Удовольствие от кормежки для каждой из коров описывается следующим уравнением: $u(x, t) = -2x^2 + 40x - 10t$ (каждой корове не терпится поесть).

а) Сколько сена съест корова, если ей никто не мешает? Как это количество зависит от времени питания t ?

б) Если в одном временном интервале конкурируют 2 коровы, сколько съест каждая из них? А если сразу 3 коровы?

в) Назовем *равновесием* такой выбор коровами времени кормления и количества съеденного сена, при котором ни одна из них, узнав о выборе остальных, не жалеет о собственном выборе. Решения принимаются одновременно. Какое время кормления будут выбирать коровы в равновесии и сколько сена они съедят?

г) Изменится ли ваш ответ на вопрос пункта в), если запас сена ограничен 20 килограммами? Считайте, что если во время какого-то кормления запас сена недостаточен для того, чтобы насытиться всем участницам, то они делят его поровну.

XXXV Турнир городов

ЗАДАЧИ ОСЕННЕГО ТУРА

Базовый вариант

8–9 классы

1. (3)¹ В турнире участвуют 100 борцов, все разной силы. Более сильный всегда побеждает более слабого. Борцы разбиты на пары и провели поединки. Затем разбиты на пары по-другому и снова провели поединки. Призы получили те, кто выиграл оба поединка. Каково наименьшее возможное количество призеров?

Б.Френкин

2. (4) Найдется ли десятизначное число, записанное десятью различными цифрами, такое, что после вычеркивания из него любых шести цифр получится составное четырехзначное число?

К.Кноп

3. (4) Наибольший общий делитель натуральных чисел a , b будем обозначать (a, b) . Пусть натуральное число n таково, что

$$(n, n+1) < (n, n+2) < \dots < (n, n+35).$$

Докажите, что $(n, n+35) < (n, n+36)$.

Б.Френкин

4. (5) На боковых сторонах AB и AC равнобедренного треугольника ABC отметили соответственно точки K и L так, что $AK = CL$ и $\angle ALK + \angle LKB = 60^\circ$. Докажите, что $KL = BC$.

Е.Бакаев

5. (6) См. задачу M2326 «Задачника «Кванта».

10–11 классы

1. (3) См. задачу 2 для 8–9 классов.

2. (4) На сторонах треугольника ABC построены три подобных треугольника: YBA и ZAC – во внешнюю сторону, а XBC – внутрь (соответственные вершины перечисляются в одинаковом порядке). Докажите, что $A'YXZ$ – параллелограмм.

Фольклор (предложил А.Бердников)

3. (4) Наименьшее общее кратное натуральных чисел a , b будем обозначать $[a, b]$. Пусть натуральное число n таково, что

$$[n, n+1] > [n, n+2] > \dots > [n, n+35].$$

Докажите, что $[n, n+35] > [n, n+36]$.

Б.Френкин

4. (5) См. задачу M2326 «Задачника «Кванта».

5. (6) Космический аппарат сел на астероид, про который известно только, что он представляет собой шар или куб. Аппарат прополз по поверхности астероида в точку, симметричную начальной относительно центра астероида. Все это время он непрерывно передавал свои пространственные координаты на космическую станцию, и там построили

¹ В скобках после номера задачи указано максимальное количество баллов, присуждавшихся за решение. Итог подводился по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.

точную трехмерную модель траектории аппарата. Может ли этого оказаться недостаточно, чтобы отличить, по кубу или по шару ползал аппарат?

Е.Бакаев

Сложный вариант

8–9 классы

1. (5) Есть 100 красных, 100 желтых и 100 зеленых палочек. Известно, что из любых трех палочек трех разных цветов можно составить треугольник. Докажите, что найдется такой цвет, что из любых трех палочек этого цвета можно составить треугольник.

Г.Жуков, Н.Косинов

2. (5) Учитель выбрал 10 подряд идущих натуральных чисел и сообщил их Пете и Васе. Каждый мальчик должен разбить эти 10 чисел на пары, посчитать произведение чисел в каждой паре, а затем сложить полученные 5 произведений. Докажите, что мальчики могут сделать это так, чтобы разбиения на пары у них не были одинаковыми, но итоговые суммы совпадали.

Н.Авилов

3. (6) В треугольнике ABC угол C прямой. На катете CB как на диаметре во внешнюю сторону построена полуокружность, точка N – середина этой полуокружности. Докажите, что прямая AN делит пополам биссектрису угла C .

Р.Гордин

4. (7) Петя нарисовал на плоскости квадрат, разделил на 64 одинаковых квадрата и раскрасил их в шахматном порядке в черный и белый цвета. После этого он загадал точку, находящуюся строго внутри одного из этих квадратов. Вася может начертить на плоскости любую замкнутую ломаную без самопересечений и получить ответ на вопрос, находится ли загаданная точка строго внутри ломаной или нет. За какое наименьшее количество таких вопросов Вася может узнать, какого цвета загаданная точка – белого или черного?

Е.Бакаев

5. (9) См. задачу M2329 «Задачника «Кванта».

6. (10) Число

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$$

представили в виде несократимой дроби. Докажите, что если $3n+1$ – простое число, то числитель получившейся дроби делится на $3n+1$.

М.Малкин

7. (12) См. задачу M2331 «Задачника «Кванта».

10–11 классы

1. (5) См. задачу 4 для 8–9 классов.

2. (6) Найдите все n , для которых верно утверждение: для любых двух многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ степени n найдутся такие одночлены ax^k и bx^l , где $0 \leq k, l \leq n$, что графики многочленов $P(x) + ax^k$ и $Q(x) + bx^l$ не будут иметь общих точек.

Г.Жуков

3. (6) См. задачу M2327 «Задачника «Кванта».

4. (7) См. задачу M2328 «Задачника «Кванта».

5. Существуют ли такие две функции f и g , принимающие только целые значения, что для любого целого x выполнены соотношения:

$$\text{а) (3) } f(f(x)) = x, \quad g(g(x)) = x, \quad f(g(x)) > x, \\ g(f(x)) > x;$$

$$\text{б) (5) } f(f(x)) < x, \quad g(g(x)) < x, \quad f(g(x)) > x, \\ g(f(x)) > x?$$

Л. Стужас

6. (9) См. задачу M2331 «Задачника «Кванта».

7. (14) На плоскости нарисована замкнутая самопересекающаяся ломаная. Она пересекает каждое свое звено ровно один раз, причем через каждую точку самопересечения проходят ровно два звена. Может ли каждая точка самопересечения делить оба этих звена пополам? (Нет самопересечений в вершинах и нет звеньев с общим отрезком.)

А. Шаповалов, А. Лебедев

Публикацию подготовили С. Дориченко, Л. Медников, И. Рубанов, А. Семёнов, А. Шаповалов

XVIII Международная астрономическая олимпиада

Очередная, уже восемнадцатая, Международная астрономическая олимпиада школьников прошла с 6 по 14 сентября 2013 года в городе Вильнюсе и поселке Дубингай (Литва). В олимпиаде приняли участие 89 школьников, представлявших 20 команд из 18 стран, — победители национальных астрономических олимпиад Армении, Бангладеш, Болгарии, Индии, Индонезии, Италии, Казахстана, Китая, Кореи, Литвы, России, Румынии, Таиланда, Украины, Чехии, Швеции, Шри Ланки, Эстонии, а также Крыма и Москвы. Команды России и Москвы были сформированы по результатам заключительного этапа XX Всероссийской олимпиады школьников по астрономии, который прошел в апреле 2013 года в городе Орле.

Как обычно, школьники были разделены на две группы — α и β (начинающие и продолжающие) и соревновались в трех турах: теоретическом, наблюдательном и практическом. На теоретическом туре надо было решить 6 задач из области классической астрономии, астрофизики, физики космоса и физики планет. Задания на наблюдательном туре были связаны с работой на телескопе. На практическом туре давались две задачи по обработке наблюдательных данных.

Стиль всех задач, предлагаемых на олимпиаде, нацелен на развитие воображения, творческого и свободного мышления. Их решение требует понять суть задачи, предложить модель решения задачи, оценить, какие параметры являются важными, а какие несущественными, сделать необходимые логические выводы и численные оценки. Туры олимпиады — это не тесты на скоростное решение задачи или на проверку знаний формальных фактов (необходимые формальные данные даются участникам как приложение к условиям). При оценке решений в первую очередь учитывается, какой путь решения избран школьником, а окончательный ответ не является единственным определяющим критерием. От участников требуется проявлять аналитические способности, а не только выполнять вычисления по строго определенным правилам. Не требуется также следовать исключительно тому пути решения, который предложен автором задачи.

Еще одна особенность олимпиады — способ подачи справочных данных. Необходимые данные и константы приводятся в условии каждой задачи. Ко всему комплексу задач прилагается справочный материал (в данном случае это, например, диаграмма Герцшпрунга—Рассела; данные о некоторых звездах; элементы орбит и физические характеристики некоторых планет, Луны и Солнца; некоторые физи-

ческие постоянные и математические формулы; карта Литвы и уравнение времени), а участники должны сами выбрать необходимые к каждой задаче данные и константы.

Кроме соревновательной части, Международная астрономическая олимпиада включает многочисленные официальные и неформальные контакты, обмен идей, сотрудничество между школьниками, их учителями, учеными из различных стран.

По решению международного жюри, состоявшего из представителей всех участвующих стран, победителями и призерами XVIII Международной астрономической олимпиады были признаны 55 школьников. Дипломы I степени получили школьники из Болгарии, Индии, Казахстана, Китая, России, Румынии и Украины. *Сергей Желтоухов* (Россия) и *Кирилл Гришин* (Россия) показали самые лучшие результаты в группах α и β соответственно.

Следующая, XIX Международная астрономическая олимпиада состоится осенью 2014 года в Киргизии. Информация представлена на странице www.issr.ac.ru/iao/2014/

Ниже приводятся задачи теоретического тура олимпиады.

Теоретический тур

Группа α

Задача 1. Восход звезды в Молетае

Наблюдатель в Молетае зарегистрировал, что некоторая звезда 8 сентября 2013 года кульминировала в 02:54 и зашла в 05:45. Эффекты, связанные с неровностями горизонта, не учитывайте.

1.1. В какое время эта звезда взойдет 9 сентября 2013 года?

1.2. В каком примерно направлении нужно ждать восхода этой звезды? Выберите один из вариантов: С, СВ, В, ЮВ, Ю, ЮЗ, З, СЗ. Ответ сопроводите поясняющим рисунком.

Задача 2. Глизе 581 g

Это небесное тело в системе звезды Глизе 581 является наиболее похожей на Землю планетой, открытой за пределами Солнечной системы, и экзопланетой, признанной наиболее пригодной для развития белковой жизни.

2.1. Оцените орбитальный период Глизе 581 g. Орбиту считайте круговой.

Задача 3. Наблюдения с Глизе 581 g

3.1. Какой видимой звездной величины и **3.2.** примерно в каком созвездии будет видно наше Солнце при наблюдениях с планеты Глизе 581 g?

Задача 4. XVIII век. Полдень

В истории науки в разное время использовались разные системы мер. Эта задача – использовать исторические (ныне устаревшие) единицы измерений.

4.1. Вычислите мощность солнечной энергии, падавшей в конце XVIII века на единицу территории окрестностей местечка Дубингай в полуденное время: зимой, весной, осенью и летом. Ответ необходимо дать в «новых» физических единицах, которые тогда вводились в действие на этой территории: лошадиных силах на квадратную версту.

4.2. Оцените также, какова была в то время мощность солнечной энергии, падавшей на одну местную лошадь. Ответ тоже необходимо выразить в физических единицах, которые тогда вводились в действие. Чему можно удивиться, получив правильный ответ?

Задача 5. XXI век. Полдень

Как известно, Литовская Республика использует исчисление времени UT+02 зимой и UT+03 летом.

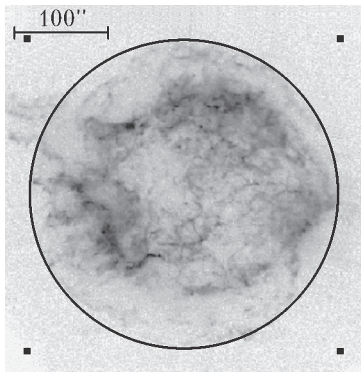
5.1. Есть ли в Литве такие пункты, в которых сегодня (8 сентября 2013 года) Солнце будет находиться точно на юге в тот момент, когда часы жителей этого пункта покажут 12:00 («да» или «нет»)?

5.2. А вообще, в другие дни года, найдутся ли такие пункты («да» или «нет»)? Если «да», то вычислите, в какие даты, если «нет», то обоснуйте это с помощью вычислений.

Задача 6. Остаток вспышки сверхновой

С помощью космического телескопа «Чандра» было получено рентгеновское изображение остатка вспышки сверхновой SNR в Cas A, расположенной от нас на расстоянии

$d = 3400$ пк. Негатив этого снимка представлен на рисунке. Кругом помечены границы области SNR. В верхнем левом углу рисунка – масштаб. Точка, расположенная вблизи центра круга, – нейтронная звезда (ядро взорвавшейся звезды). Прямоугольные значки вне круга – реперные точки для построения центра круга. Предположим, что энер-



гия, выделившаяся при взрыве сверхновой, была порядка $E \approx 10^{46}$ Дж и что 1% этой энергии движет расширяющуюся материю. Средняя плотность вещества в SNR порядка $\rho \approx 10^{-21}$ кг/м³.

6.1. Оцените возраст SNR Cas A.

6.2. Рассчитайте среднюю скорость движения нейтронной звезды от центра SNR.

Группа β

Задача 1. Радиоастрон

Радиоастрон – это международный научный проект, возглавляемый Астрокосмическим центром Российской академии наук. 18 июля 2011 года на эллиптическую орбиту вокруг Земли был выведен спутник «Спектр-Р» с 10-метровым (в диаметре) космическим радиотелескопом. Вместе с наземными радиотелескопами «Спектр-Р» работает как интерферометр. Радиоастрон работает на стандартных радиоастрономических длинах волн 1,19–1,63 см (К-диапазон), 6,2 см (С-диапазон), 18 см (L-диапазон) и 92 см (P-диапазон). В настоящее время «Спектр-Р» обращается по сильно вытянутой эллиптической орбите с периодом $\tau = 8,3$ суток и высотой перигея $h = 600$ км от поверхности Земли.

1.1. Оцените максимальную разрешающую способность (угловое разрешение в угловых секундах) Радиоастроны. С помощью схематического рисунка объясните, в какой ситуации это реализуется.

1.2. Оцените разрешающую способность Радиоастроны при наблюдениях объектов, расположенных по направлению большей оси орбиты «Спектра-Р»; решение также сопроводите рисунком.

Задача 2. См. задачу 2 (условие и вопрос 2.1.) для группы α .

2.2. Предположим, что на планете Глизе 581 g есть разумная жизнь. Цивилизация пользуется радиоволнами. Можно ли с помощью наблюдений на Радиоастроне определить размер (диаметр) планеты («да» или «нет»)? Ответ обоснуйте с помощью вычислений.

Задача 3. См. задачу 3 (условие и вопросы 3.1. и 3.2.) для группы α .

3.3. Оцените угловой диаметр звезды Глизе 581 при наблюдениях с планеты Глизе 581 g.

4-6. См. задачи 4–6 для группы α .

Публикацию подготовил М.Гаврилов

Когда помогают графики

(Начало см. на с. 47)

жесткостью k – и не зависит от состояния его движения:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Поэтому секундный пружинный маятник совершит 10 колебаний за время работы двигателя и 110 колебаний – за все время полета.

Период колебаний математического маятника в неподвижной ракете равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

а при работающем двигателе –

$$T^* = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a}}.$$

Из двух последних равенств находим

$$T^* = T\sqrt{\frac{g}{g+a}} = T\sqrt{\frac{1}{11}}.$$

Следовательно, за время работы двигателя математический маятник совершит

$$N = \frac{t_0}{T^*} = \frac{t_0\sqrt{11}}{T} \approx 33 \text{ колебания.}$$

После выключения двигателя ракеты математический маятник окажется в невесомости, и его колебания прекратятся.

И снова о числе Эйлера в треугольнике Паскаля

В «Кванте» №4 за 2013 год была опубликована заметка Е.Епифанова «Число Эйлера в треугольнике Паскаля», в которой приведено доказательство теоремы Харлана Бразерса:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{n-1}s_{n+1}}{s_n^2} = e, \quad (1)$$

где s_n – произведение всех чисел в n -й строке треугольника Паскаля, e – число Эйлера, равное пределу $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Оказывается, треугольник Паскаля «скрывает» еще одно важное число, которое тоже можно назвать числом Эйлера. Хотя оно было известно задолго до Эйлера, именно Эйлер предложил обозначить отношение длины окружности к длине ее диаметра греческой буквой π (пи). Сейчас вы узнаете, как это число «отыскать» в треугольнике Паскаля. Для этого, правда, придется немного повозиться с пределами – оно там неплохо запрятано.

Пронумеруем в треугольнике строки и числа в строках, причем, как и в упомянутой заметке, нумеровать строки и числа начинаем с нуля. Рассмотрим строку с четным номером $2n$ и разобьем числа ¹ в ней на два множества: в первое войдут числа с четными номерами, во второе – с нечетными. Произведение всех чисел из первого множества обозначим E_{2n} , из второго – O_{2n} (от англ. even – четный, odd – нечетный). Например, $E_6 = 1 \cdot 15 \cdot 15 \cdot 1 = 225$, а $O_6 = 6 \cdot 20 \cdot 6 = 720$. После простых преобразований получим равенство

$$\frac{O_{2n}}{E_{2n}} = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}. \quad (2)$$

Символом $k!!$ обозначают произведение всех натуральных чисел, которые не больше k и имеют одну с ним четность. Например, $6!! = 2 \cdot 4 \cdot 6$, $7!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.

Упражнение 1. Проверьте, что равенство (2) действительно верно.

Теперь рассмотрим бесконечное произведение

$$P(x) = x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{(2\pi)^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{(3\pi)^2}\right) \dots$$

Если в это выражение вместо x подставить любое из чисел $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots$, то оно обратится в ноль. При этих же значениях x обращается в ноль функция $\sin x$. Кроме того,

очевидно, что $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{P(x)}{x} = 1$. Но известен первый замечательный предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Исходя из этих соотношений,

Эйлер предположил (а затем и доказал), что $\sin x = P(x)$. Мы этого проверять не будем, а доверимся великому математике.

Запишем формулу Эйлера в виде

$$\sin x = \lim_{n \rightarrow \infty} x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{(2\pi)^2}\right) \dots \left(1 - \frac{x^2}{(n\pi)^2}\right).$$

Полагая $x = \frac{\pi}{2}$, после небольших преобразований приходим

¹ Напомним, что число C_n^k , стоящее в треугольнике Паскаля в n -й строке на k -м месте, – это число сочетаний из n по k . Оно равно $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Считаем, что $C_n^0 = 1$ при всех n .

к знаменитой формуле Валлиса:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2n+1} \right).$$

Упражнение 2. Докажите формулу Валлиса.

Заменив $\frac{1}{2n+1}$ на $\frac{1}{2n}$ (что, очевидно, не изменит предел), перепишем формулу Валлиса так:

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \frac{1}{n} \right). \quad (3)$$

Сравнивая равенства (2) и (3), получим то, что мы искали:

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{O_{2n}^2}{nE_{2n}^2}. \quad (4)$$

Из равенств (1) и (4) можно получить другие интересные соотношения. Например, такие:

$$e \cdot \pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{2n-1}s_{2n+1}}{nE_{2n}^4},$$

$$\frac{e}{\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot s_{2n-1} \cdot s_{2n+1}}{O_{2n}^4}.$$

В курсе высшей математики доказывается формула

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots$$

Из этого и (2) следует:

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{E_2}{3O_2} + \frac{E_4}{5O_4} + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_{2n}}{(2n+1)O_{2n}}.$$

На первый взгляд числа e и π кажутся «пришельцами из разных миров». Но Эйлер доказал замечательную формулу $e^{\pi i} = -1$, где i – мнимая единица. Тесная связь чисел e и π прослеживается во многих областях математики. Их отражение в треугольнике Паскаля – еще одно тому подтверждение. Можно привести еще множество выражений π числами треугольника Паскаля.

Стоит заметить, что e тоже можно представить числами треугольника Паскаля не единственным способом. Для любого натурального n верны неравенства

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Значит,

$$(1+1)^1 < e < (1+1)^2, \quad \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 < e < \left(1 + \frac{1}{2}\right)^3,$$

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 < e < \left(1 + \frac{1}{3}\right)^4, \quad \dots, \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Перемножая, получим

$$\frac{(n+1)^n}{n!} < e^n < \frac{(n+1)^{n+1}}{n!}, \quad (5)$$

откуда

$$\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} < e < \frac{(n+1)(n+1)^{\frac{1}{n}}}{\sqrt[n]{n!}}.$$

Разность между крайними значениями стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, поэтому $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$. Нетрудно прове-

речь, что

$$\frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{(n+1)^n}{n!}. \quad (6)$$

Отсюда $\sqrt[n]{\frac{s_{n+1}}{s_n}} = \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}$. Следовательно,

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{s_{n+1}}{s_n}}.$$

Тем самым мы получили еще один предел для числа e , который связан с треугольником Паскаля.

Но можно продолжить. Из (5) и (6) следуют неравенства

$$\frac{s_2}{s_1} < e < \frac{2s_2}{s_1}, \quad \frac{s_3}{s_2} < e^2 < \frac{3s_3}{s_2}, \quad \dots, \quad \frac{s_n}{s_{n-1}} < e^{n-1} < \frac{ns_n}{s_{n-1}}.$$

Перемножая их все и учитывая, что $s_1 = 1$, имеем

$$s_n < e^{\frac{(n-1)n}{2}} < n!s_n, \text{ откуда}$$

$$\frac{1}{s_n^{(n-1)n}} < \sqrt{e} < (n!)^{\frac{1}{(n-1)n}} \frac{1}{s_n^{(n-1)n}}.$$

Переходя к пределу и принимая во внимание, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left((n!)^{\frac{1}{(n-1)n}} \right) = 1, \text{ а разность между крайними величинами}$$

стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, получим $\sqrt{e} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)n}{\sqrt{s_n}}$.

Все числа треугольника Паскаля – биномиальные коэффициенты. Однако этим не исчерпываются связи треугольника с биномом Ньютона. При целых положительных n в равенстве

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots$$

справа стоит многочлен от x . Но это равенство выполняется и при произвольных n , хотя и не для любых x . Например, при $n = -\frac{1}{2}$ получится

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots;$$

это равенство верно при $x \in (-1; 1]$. Оно позволяет вычислять некоторые корни с любой точностью. Например, если $x = \frac{1}{3}$, то

$$\sqrt{3} = 2 \left(1 - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 3^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 3^3} + \dots \right).$$

Вспомня (2), можем записать:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{E_2}{O_2}x + \frac{E_4}{O_4}x^2 - \frac{E_6}{O_6}x^3 + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n \frac{E_{2n}}{O_{2n}} x^n \right).$$

Наверняка в треугольнике Паскаля «прячется» еще не одна формула. А сколько новых формул сможете найти вы?..

И. Вайнштейн

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6–8»

(см. «Квант» №4 за 2013 г.)

1. 9 и 4.

Два делителя имеют только простые числа (они делятся на себя и на 1). А три делителя имеют только квадраты простых чисел. В самом деле, если число n не простое, то его можно записать в виде $n = km$. Если $k \neq m$, то у числа n будет не меньше 4 делителей: 1, k , m и km . Значит, $k = m$, т.е. $n = k^2$, причем k – простое (иначе у n будут делителями еще и делители числа k).

Итак, пусть наши два числа – квадраты простых чисел: p^2 и q^2 . Их разность s равна $s = p^2 - q^2 = (p - q)(p + q)$. Если $p - q > 1$, то s будет произведением двух чисел, каждое из которых не меньше 2, т.е. будет составным. Но тогда оно не может иметь ровно два делителя. Следовательно, $p - q = 1$, т.е. разность между двумя простыми числами равна 1. Такие простые числа единственны – это 3 и 2. Значит, наши числа – это 9 и 4, их разность равна 5.

2. Неверно.

Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC с углом 150° при вершине A (рис. 1). Обозначим длину его боковой стороны за 1. Пусть точка X симметрична вершине A относительно основания BC , а точки Y и Z симметричны вершинам B и C относительно продолжений боковых сторон AC и BC соответственно. Пусть M – середина BY . Угол BAM равен тогда $180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$, откуда угол BAU равен 60° . Но треугольник BAU равнобедренный ($AB = AU$, так как B и U симметричны относительно прямой CA). Поскольку угол при его вершине A равен 60° , то он равносторонний, со стороной 1.

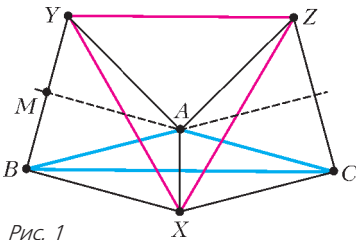


Рис. 1

В частности, $BY = 1$. Кроме того, треугольник ABX – равнобедренный ($AB = AX$), с углом 30° при вершине B (так как A и X симметричны относительно прямой BC , и угол ABC равен 15°). Значит, $BX = 1$, а угол YBX равен 90° . Получаем, что YX – гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника с катетом 1. Аналогично, ZX – гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника с катетом 1.

Осталось заметить, что угол YAZ равен $360^\circ - 150^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$ и $YA = ZA = 1$, т.е. YZ – тоже гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника с катетом 1. Получаем, что в треугольнике XYZ все стороны равны 1, т.е. он равносторонний.

3. Срок присылки решений этой задачи продлен. Решение будет опубликовано в «Кванте» №2.

4. Нарисуем на клетчатой плоскости сетку из квадратов площади a . На этой сетке можно нарисовать квадрат с площадью в b раз большей, чем площадь одного квадрата этой сетки. Его площадь будет равна ab .

5. Можно.

Один из примеров изображен на рисунке 2. Черная проволочная фигура вписана в красный куб $ABCDEFGH$, и все характерные точки отмечены буквами. Точка M делит ребро AE в отношении 1:2, считая от вершины A , точка N делит MH в отношении 1:3 от точки M . Конфигурация проволочных отрезков в грани $BCGF$ аналогичная. Точка P – середина MK , R – середина HG .

Чтобы получилась буква «К», надо проектировать параллельно отрезку AB . Для получения буквы «М» надо проектировать параллельно отрезку MH . А если спроектировать вдоль AE , то получится буква «Ш».

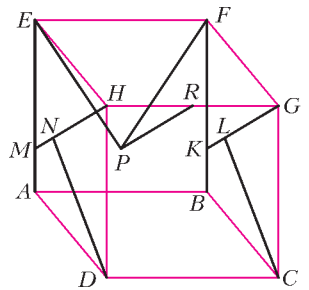


Рис. 2

42-Й УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ

6 класс

1. Достаточно, чтобы на 101 делилась разность R старого и нового чисел. Поменяем местами вторую и шестую цифры. Если эти цифры равны a и b соответственно, то $R = 10000(a - b) + (b - a) = 9999(a - b) = 99 \cdot 101(a - b)$.

Замечание. Прodelать тот же фокус с первой и пятой цифрами можно не всегда: пятая цифра может быть нулем.

2. Не могло.

Пусть двадцатое число равно a . Шестнадцатое число, равное $a - 4$, делится на 16. Поэтому двадцатое число не может делиться на 16, а должно делиться на 400. Противоречие.

3. 99.

Пример: $49005:495 = 99$. *Оценка.* Пусть a – число, в котором вычеркивали нули, b – получившееся в результате число. В числах a и $100b$ совпадают цифры до вычеркнутых нулей, а далее в b первая ненулевая цифра идет на два разряда раньше, чем в a . Поэтому $a < 100b$.

4. Нельзя.

Назовем первым цвет, в который окрашена единица. Где-то есть число n второго цвета. Тогда число $n + 1$ должно быть третьего цвета, число $n + 2 = (n + 1) + 1$ – второго цвета, $n + 3$ – снова третьего и т.д. Но, с другой стороны, число $n + (n + 1) = 2n + 1$ должно быть первого цвета. Противоречие.

5. Не могло.

Выведем всех сотрудников во двор, и пусть каждый правой рукой возьмется за левую руку того, на кого он донес. Так как доносов было столько же, сколько сотрудников, и ни на кого не доносили двое, все левые руки тоже окажутся заняты. Это значит, что все сотрудники разобьются на хороводы. Ясно, что выгоняли честных, на которых доносили честные, и лжецов, на которых доносили лжецы. Поэтому если несколько лжецов или несколько честных идут в хороводе подряд, то выгонят их всех, кроме одного. В результате оставшиеся в каждом хороводе сотрудники будут чередоваться (честный, лжец, честный, лжец, ...) т.е. останется в каждом хороводе – а значит, и всего – четное число людей.

6. До начала деятельности вождя для каждой пары соседних деревень отметим замкнутый маршрут (из двух дорог), проходящий только через них. Также отметим два замкнутых маршрута, проходящих вокруг острова по часовой и против часовой стрелки. Всего отмечено 2015 маршрутов, среди которых нечетное количество (поначалу – 2013) имеют четную длину (длиной маршрута мы называем число входящих в него деревень). Каждая дорога содержится ровно в двух из них. Поэтому добавление деревни на любой дороге меняет четность ровно двух отмеченных маршрутов. Строительство новых дорог отмеченные маршруты вообще не затрагивает. Значит, отмеченных маршрутов с четным числом деревень

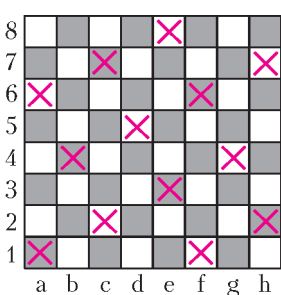


Рис. 3

всегда будет нечетное число, т.е. всегда будет хотя бы один такой маршрут.

7. Не может.

Отметим на доске клетки $a_1, a_6, b_4, c_2, c_7, d_5, e_3, e_8, f_1, f_6, g_4, h_2, h_7$ (рис.3). Нетрудно видеть, что все казанские ходы с отмеченной клетки ведут в отмеченные, а вятские – в неотмеченные. Поэтому отмеченные клетки должны встречаться на искомом

обходе парами. Но такой обход не может проходить через все отмеченные клетки, поскольку их нечетное число.

8. Возьмем любые семь из проведенных прямых и разобьем их на группы параллельных. Групп не может быть больше

трех: иначе мы взяли бы из четырех групп по одной прямой и получили бы четверку прямых, противоречащую условию задачи.

Поскольку $3 \cdot 2 < 7$, в одной из групп будет не меньше трех прямых, что и требовалось.

9. Суммарная площадь всех прямоугольников равна 400.

Суммарный периметр состоит из периметра квадрата (80) и удвоенной суммарной длины проведенных отрезков (320), т.е. тоже равен 400. Осталось заметить, что если бы у каждого прямоугольника периметр был меньше площади, то тогда суммарный периметр тоже оказался бы меньше суммарной площади.

10. Четверо.

Возьмем любого школьника. По крайней мере пятеро получили sms-ки от него. Возьмем одного из этих пятерых. Адресат хотя бы одной из его sms-ок не входит в число этих пятерых. Таким образом, получали sms-ки хотя бы шестеро. *Пример,* когда таких ровно шестеро: шесть девочек посылают sms-ки друг другу, а каждый из четырех мальчиков – каким-то пятерым девочкам.

7 класс

1. Не умаляя общности, можно считать, что z – наименьшее из трех чисел. Положим $a = x - z, b = y - z$. Теперь неравенство примет вид

$$|(a - b)^3 + b^3 - a^3| = |3ab(a - b)| \geq 6.$$

Оно верно, так как a и b – различные натуральные числа.

2. Не могла.

Предположим, что Васе это удалось. Обозначим первое произведение через a , второе – через b . Среди 100 чисел есть число, кратное 97. Поэтому хотя бы одно из чисел a, b делится на 97. Сумма $a + b = 100!$ тоже делится на 97, поэтому и a и b делятся на 97. Следовательно, и в a и в b есть по множителю, кратному 97, так как 97 – простое число. Но этого не может быть, поскольку разница между любым множителем из a и любым множителем из b не превышает 74.

3. Один.

Рассмотрим первое появление квадрата (пусть это n^2). Он дает остаток 0 или 1 при делении на 4. Делители числа n^2 разбиваются на пары: произведение чисел в каждой паре равно n^2 . Но число n остается без пары. Следовательно, число делителей квадрата нечетно, а удвоенное количество его делителей дает остаток 2 при делении на 4. Поэтому следующее число x дает остаток 2 или 3 при делении на 4. Значит, оно не является квадратом. Как выше, доказываем, что число его делителей четно, а удвоенное количество его делителей делится на 4. Поэтому следующее за x число тоже дает при делении на 4 остаток 2 или 3 и т.д. Таким образом, дальше в этой последовательности ни одного квадрата не встретится.

4. На расстоянии $3/5$ всего пути, считая от дома Винни-Пуха.

Пусть весь путь до Пятачка и обратно Винни-Пух проходит за 4 часа, а расстояние от Совы до Тигры с обычной скоростью – за t часов. Рассмотрим два случая.

1) Тигра живет на отрезке между Совой и Пятачком. Тогда Винни-Пух затратит на весь путь время

$$1 + \frac{5}{4}t + \frac{5}{6}(2 - t) + \frac{5}{4} = \frac{5}{12}t + 3\frac{11}{12} = 4,$$

откуда $t = 1/5$.

2) Тигра живет на отрезке от Винни-Пуха до Совы. Тогда Винни-Пух затратит на весь путь время

$$(1 - t) + \frac{5}{6}t + \frac{5}{4}(2 + t) + \frac{5}{6}(1 - t) = \frac{1}{4}t + 4\frac{1}{3} > 4.$$

Поэтому этот случай невозможен.

5. Может.

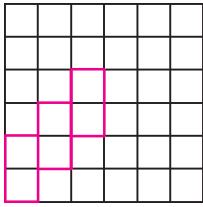


Рис. 4

Пример приведен на рисунке 4. Единственность покрытия проверяется без труда.

6. При любом $k \geq 2$.

Пусть площадь треугольника равна S . Отрежем от него треугольник ABC площади $2S/k$ по прямой, параллельной одной из сторон исходного треугольника. Оставшаяся часть будет трапецией.

Разделим каждое из ее оснований на $k - 2$ равные части и соединим соответственные точки деления отрезками: трапеция разделится на $k - 2$ меньшие трапеции одинаковой площади S/k . Осталось разделить

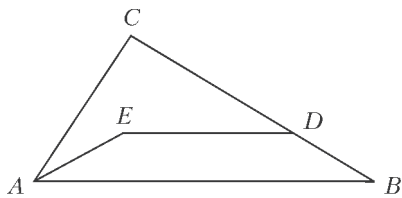


Рис. 5

треугольник ABC на два четырехугольника равной площади. Это можно сделать так, как показано на рисунке 5. Здесь $ABDE$ – трапеция, основание DE которой в

два раза меньше основания AB , а высота в три раза меньше высоты треугольника ABC , опущенной на сторону AB .

7. 60° .

Опустим перпендикуляр DH на BC (рис. 6). Треугольники BDE и BDH равны, поэтому $2BH = 2BE = BC + FD$, откуда

$$BH = BF + \frac{1}{2}FD.$$

Учитывая, что угол DBC острый, и, значит, F и H с одной стороны от B , получаем

$$FH = \frac{1}{2}FD.$$

Итак, в прямоугольном треугольнике DFH гипотенуза вдвое больше катета, откуда $\angle DFC = 60^\circ$.

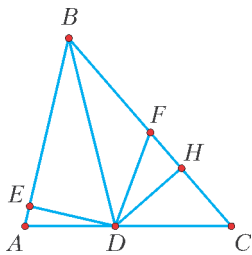


Рис. 6

8. 16 коней.

Среди 32 клеток найдутся хотя бы 16 клеток одного цвета. Кони, поставленные на эти клетки, не будут бить друг друга. Поэтому

16 коней поставить всегда можно.

Докажем, что не всегда можно поставить больше 16 коней. Отметим 32 клетки в виде прямоугольника 4×8 . Его можно разбить на прямоугольники 2×4 , а последние прямоугольники разбиваются на пары клеток, «соединенных» ходом коня. Всего таких пар 16, а в каждую пару можно поставить не более одного коня. Поэтому всего можно поставить не более 16 коней.

9. Нарисуем по кругу 300 точек – они будут изображать школьников. Если два школьника знакомы, соединим соответствующие вершины отрезком. Тройке знакомых школьников будет соответствовать треугольник. По условию, треугольников больше, чем отрезков. Тогда, так как каждый треугольник состоит из трех отрезков, найдется отрезок, входящий хотя бы в четыре разных треугольника (подумайте, почему). Возьмем школьника из пары, соответствующей этому отрезку, – он будет знаком хотя бы еще с четырьмя другими школьниками (кроме того, кто в этой паре).

10. *Первое решение.* Разобьем всех детей на пары друзей и тройки. Тройка – это три человека, где один из них – центр тройки – дружит с двумя остальными; дружат ли при этом эти двое друг с другом, нас не интересует. Покажем, что это возможно. Пусть некоторое количество детей уже распределено по парам и тройкам. Возьмем еще не распределенного человека A и разберем несколько случаев.

1) У A есть друг B среди еще не распределенных. Тогда A и B образуют новую пару.

2) Все друзья A уже распределены.

2а) У A есть друг из некоторой пары. Добавив A к этой паре, получим тройку.

2б) У A есть друг из тройки, в которой он не является центром. Отсоединим его от этой тройки и переведем в пару с A . В результате вместо тройки образовались две пары.

2в) Все друзья A – центры троек. Но тогда таких троек – 30, и общее число детей больше 90. Значит, этот случай невозможен.

Общее число школьников делится на 3, поэтому число полученных пар тоже делится на 3. Объединим по три пары в шестерки. Аналогично, число троек четно; объединим их попарно в шестерки. Теперь составим три класса из пяти шестерок каждый.

Второе решение. Назовем распределение по классам *плохим*, если найдется школьник, не имеющий друзей в своем классе. Достаточно доказать, что количество всех распределений больше количества плохих распределений.

30 детей в класс A можно выбрать C_{90}^{30} способами, 30 детей в класс B из оставшихся 60-ти – C_{60}^{30} способами. Значит, количество возможных распределений детей по классам равно $C_{90}^{30} \cdot C_{60}^{30}$.

Оценим количество плохих распределений. Чтобы создать плохое распределение, выберем школьника (90 способов), потом 29 человек из тех, с которыми он не дружит (не более C_{59}^{29} способов), и поместим их в один из 3 классов. Далее выберем 30 школьников из оставшихся 60-ти (C_{60}^{30} способов) и поместим их в другой класс. Итого, плохих распределений не больше чем $90 \cdot C_{59}^{29} \cdot 3 \cdot C_{60}^{30}$ (ясно, что мы многие разбиения подсчитали несколько раз). Осталось проверить, что $3 \cdot 90 \cdot C_{59}^{29} < C_{90}^{30}$. После сокращения одинаковых множителей это неравенство сводится к такому: $3 \cdot 30 \cdot 31 \cdot \dots \cdot 59 <$

$61 \cdot 62 \cdot \dots \cdot 89$. Действительно, левая часть не превосходит $3 \cdot 40^{10} \cdot 60^{20}$, правая – не меньше $60^{20} \cdot 80^9$, а $\frac{80^9}{3 \cdot 40^{10}} = \frac{2^9}{12} > 1$.

8 класс

1. 149.

Всего есть семь четверок последовательных цифр: от 0, 1, 2, 3 до 6, 7, 8, 9. У каждой – по 24 перестановки, всего – 168. Из них 6 перестановок начинаются с нуля и не годятся для обозначения лет, 12 – с единицы (эти годы уже прошли), 2013 тоже не считается. Остается $168 - 19 = 149$ лет.

2. 512.

Заметим, что сумма четырех слагаемых, каждое из которых 1 или 2, равна 4, 5, 6, 7 или 8. Нас устраивают суммы 5 и 7. Таким образом, в данном случае простота суммы равносильна ее нечетности. Покажем, что если произвольным образом заполнить в таблице 4×4 единицами и двойками верхний левый квадрат 3×3 , что можно сделать $2^9 = 512$ способами, то оставшиеся клетки таблицы 4×4 при условии нечетности всех сумм по ее строкам и столбцам заполняются единственным образом. Для всех клеток, кроме правой нижней, это очевидно. В правую нижнюю клетку ставим число, обеспечивающее нечетность суммы в последнем столбце. Теперь в каждом столбце суммы нечетны, значит, сумма чисел во всей таблице четна. Так как в первых трех строках суммы нечетны, то и в последней строке сумма автоматически будет нечетной.

3. Может. Это числа 256 и 257.

Пусть n – число, делящееся на все числа от 1 до 500, кроме каких-то k и $k + 1$. Если хотя бы одно из этих двух чисел, например k , имеет хотя бы два разных простых делителя, то его можно представить в виде произведения двух взаимно простых множителей, меньших n (и отличных от k и $k + 1$). Число n будет делиться тогда на оба эти множителя, а значит, и на k тоже – противоречие. Поэтому и k , и $k + 1$ долж-

ны быть простыми числами или степенями простых. Поскольку одно из чисел k и $k + 1$ четно, оно должно быть степенью двойки, причем наибольшей, не превосходящей 500, иначе n будет делиться на более высокую степень двойки. Отсюда k или $k + 1$ должно равняться 256. Вторым числом может быть 255 или 257. Но 255 – не простое и не степень простого, так что подходит только 257 – оно простое.

Осталось построить пример. Подойдет произведение всех нечетных чисел, меньших 500, кроме 257, умноженное на $256/2$.

4. При $k = 24$.

Если две буквы B написаны подряд на карточках, ни одна из которых не лежит с краю, то на следующей строчке под ними тоже будут две карточки с буквой B . Поэтому если написать букву B на 12-й и 13-й карточках, то в 12-м ряду тоже будет две буквы B и на единственной карточке 13-й строчки будет написана буква B . Таким образом, 23-х карточек с буквой A может не хватить, 24-х же всегда хватит, так как единственная буква B исчезнет уже во второй строке.

5. 2 раза.

Назовем числа с 1000 по 1999 *средними*, а числа, начиная с 2000, – *большими*. По индукции нетрудно проверить следующие утверждения.

1) В любой момент на первом месте в строке стоит 1, а на остальных – средние или большие числа.

2) Через n минут на втором месте стоит число $1000 + n$, на третьем – число $1000 + n - 1$.

3) Средние числа могут стоять рядом только на втором и третьем местах.

Число 2013 может возникнуть только как сумма соседних средних чисел или как сумма 1 и числа, стоящего на втором месте. В первый раз это происходит через 8 минут: после 7 минут второе число равно 1007, а третье – 1006, в сумме они и дадут 2013. Во второй раз – через 2013 минут: 1 сложится с числом 2012, стоящим на втором месте.

6. После приведения к общему знаменателю условие записывается в виде $abc^2 - 2abc - (a^2 + ab + b^2) = 0$, или $ab(c - 1)^2 = (a + b)^2$. Обозначив $d = c - 1$, имеем

$$d^2 - 4 = \frac{(a + b)^2 - 4ab}{ab} = \frac{(a - b)^2}{ab} = \frac{(a - b)^2 d^2}{(a + b)^2},$$

и

$$\sqrt{\frac{c - 3}{c + 1}} = \sqrt{\frac{d - 2}{d + 2}} = \sqrt{\frac{d^2 - 4}{(d + 2)^2}} = \left| \frac{(a - b)d}{(a + b)(d + 2)} \right|.$$

7. Заметим, что удвоенные произведения, стоящие под знаком радикала, не превосходят сумм квадратов множителей. Заменив произведения на эти суммы и умножив неравенство на получившийся общий знаменатель, получим, что нам достаточно доказать неравенство $x + y + z \geq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 1}$.

Возведя обе его части в квадрат, после приведения подобных получаем неравенство $2(xy + yx + zx) \geq 1$. Поделив на xyz обе

части равенства, данного в условии, получим $\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = 18$. Теперь наше неравенство вытекает из известного неравенства $(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9$, равносильного неравенству

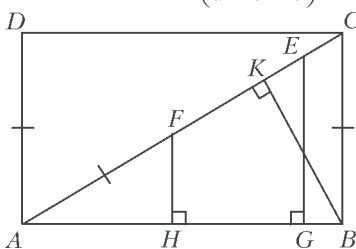


Рис. 7

между средним арифметическим и средним гармоническим для трех чисел.

8. Опустим перпендикуляр BK на AC (рис. 7). Тогда $AG = AK$ как катеты равных (по гипотенузе и острому углу) прямоугольных треугольников AEG и ABK . Кроме того,

$FH = CK$ как катеты равных (по гипотенузе и острому углу) прямоугольных треугольников $A FH$ и BCK . Поэтому $AC = AG + CK = AG + FH$.

9. Пусть N – середина отрезка DC . Тогда $\angle NMC = \angle DSC = \angle ESB = \angle SBE$, $MN = \frac{1}{2}SD = 1$, $NC = \frac{1}{2}DC = 1$. Таким образом, треугольники BES и MNC равны по двум сторонам и углу между ними, откуда $SM = MC = SB$. Значит, $\angle SBM = \angle SMB = \angle TMC$. Поэтому

$$\angle ABT = \angle SBE + \angle SBM = \angle TCM + \angle TMC = \angle ATB.$$

Следовательно, $AB = AT$.

10. Пусть N – точка пересечения BP и AL . Нетрудно показать, что углы DFK и FKE равны 60° , т.е. треугольник FKP – равносторонний. Значит, $NL : PF = BL : BF$, а $NL = KF \cdot \frac{BC}{2BF}$. Но из подобия треугольников ABL и BKF имеем $\frac{KF}{BF} = \frac{AL}{AB} = \frac{AL}{BC}$. Следовательно, $NL = \frac{1}{2}AL$, что и требовалось.

11. 30° .

Точка L – центр вневписанной окружности треугольника KCM , значит, KB – биссектриса внешнего угла K этого треугольника. Следовательно, прямые KM и KB делят развернутый угол с вершиной K на три равные части, т.е. $\angle CKM = \angle MKB = 60^\circ$. Угол KMB – внешний для треугольника KCM , поэтому $\angle KMB = \angle KCM + 60^\circ$. Угол LMB – внешний для треугольника LCM , откуда

$$\angle MLC = \angle LMB - \angle LCM = \frac{1}{2}(\angle KMB - \angle KCM) = 30^\circ.$$

12. При $m \geq 15$.

Приведем стратегию B при $m = 15$. Первую фишку он ставит на 8-е поле. Вторая фишка, если ее номер меньше, ставится на 4-е поле, а если больше – на 12-е. Для третьей фишки отводятся 2-е, 6-е, 10-е и 14-е поля. Теперь для последней фишки осталось 8 промежуточных мест, и при любом номере ее можно вставить «правильно».

Приведем стратегию A при $m = 14$. Сначала он выбирает фишку №8. Если B ставит ее на одно из первых 7 мест, A выбирает фишку №4. Если B ставит ее на одно из первых трех мест, A выбирает фишку №2. Куда бы он ее не поставил, либо для фишки №1, либо для фишки №3 нужного места не останется. Если B ставит фишку №4 на одно из мест с 4-го по 6-е, A выбирает фишку №6, тогда на следующем ходу нельзя будет правильно поставить либо фишку №5, либо фишку №7. Если первую фишку B ставит на одно из последних 7 мест, A выбирает фишку №12 и далее действует аналогично описанному выше.

ЗАДАЧА О САМОПЕРЕСЕКАЮЩЕЙСЯ ЛОМАННОЙ

1. Может.

Например, ломаная $A'B'C'D'E'A'B'CD'E$ на рисунке 8. Обозначим чертеж. Если соединить центр O правильного пятиугольника $A'B'C'D'E'$ с его вершинами, то пятиугольник разобьется на 5 равнобедренных треугольников с углами 54° при основании. Построим на каждой стороне пятиугольника как на гипотенузе равнобедренный прямоугольный треугольник, направленный внутрь пятиугольника. Эти треугольники не перекрываются, так как каждый лежит внутри своего тре-

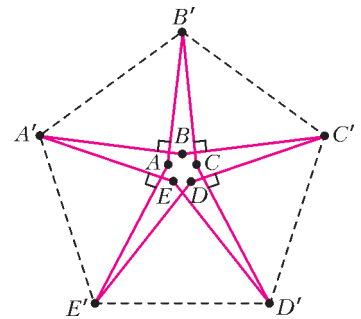


Рис. 8

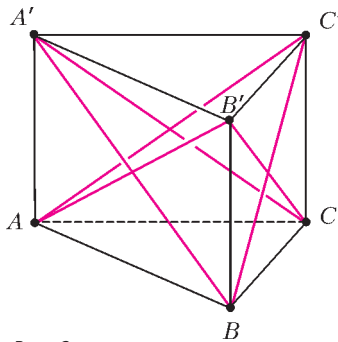


Рис. 9

угольника с вершиной O . Продолжив катеты внутрь до пересечения с продолжениями катетов соседних треугольников в точках A, B, C, D, E (см. рис.8), получим искомого ломаную.

2. Рассмотрим, например, треугольную призму $ABCA'B'C'$ (рис.9). Замкнутая ломаная $AB'CA'BCA$ удовлетворяет условию, так как боковые грани призмы – параллелограммы.

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Вопросы и задачи

1. Из-за большой инертности кирпича его скорость, приобретаемая от удара, невелика.
2. Ртуть вследствие инерции продолжает двигаться вниз, освобождая измерительную трубку.
3. Из-за резкого удара сила, действовавшая на линейку, не успевает передаться кольцам, и даже небольшая инерция покоя позволяет им остаться целыми.
4. Тормозной путь будет одним и тем же, от массы – меры инертности – он не зависит.
5. За короткое время действия со стороны электровоза инерция покоя всего поезда не позволяет ему заметно сдвинуться с места, что приводит к превышению допустимой деформации сцепок ближайших к электровозу вагонов к и их разрушению. Чтобы избежать разрывов, поезд сначала подают назад, а лишь затем трогают вперед, последовательно «подключая» массы вагонов.
6. Тело станет совершать колебания на пружине. Амплитуда колебаний будет равна той длине, на которую груз растягивал пружину в неподвижной кабине.
7. а) В начальный момент времени у частиц в верхнем сечении бруска ускорение $a > g$, у частиц в нижнем сечении $a = g$. б) В верхнем сечении бруска в начальный момент времени частицы имеют ускорение $a = g$, в нижнем сечении $a > g$.
8. Ускорение верхнего шара равно $3g$, а ускорения нижних шаров равны нулю.
9. Тот факт, что масса – скаляр, означает, что инертные свойства тела одинаковы во всех направлениях.
10. Автомобиль при левом повороте оседает на правые рессоры вследствие своей инертности – стремлении сохранить прямолинейное движение.
11. Если в этой точке $v^2/R > g$, где v – скорость самолета и R – радиус «мертвой петли», то отвес будет направлен вверх, если $v^2/R < g$, то – вниз.
12. Если бы исчезло притяжение Солнца, центр масс Земли стал бы по инерции двигаться по касательной к ее орбите. Это никак бы не отразилось на вращении Земли вокруг своей оси.
13. Из-за вращения вокруг своей оси Земля сплюснута у полюсов. Ближе всех к центру были участники погружения на дно океана под Северным полюсом.
14. Вращение Земли приводит к смещению электронов вверх вдоль рельса, из-за чего потенциал нижнего его конца будет больше потенциала верхнего.
15. Увеличится в два раза.
16. Значительная часть массы диска находится ближе к оси вращения, чем его обод. Поэтому инертность диска по отношению к вращению будет меньше, чем у кольца.
17. При ее прохождении через середину стержня.

18. Чтобы придать пуле или снаряду вращательное движение вокруг оси симметрии и этим обеспечить устойчивость полета в воздухе, а значит, и малое аэродинамическое сопротивление.

19. Яйцо, сваренное вкрутую, вращается как твердое тело, сырое – как сосуд, заполненный жидкостью. Сообщая скорлупе вращение, мы не сообщаем его всем частицам жидкости. Еще один способ различения – на мгновение притормозить вращающееся яйцо пальцем и снова отпустить. Вареное яйцо остановится, а жидкость внутри сырого яйца будет продолжать вращение и вновь заставит его крутиться.

20. Маховик является инерционным аккумулятором энергии и способствует «выравниванию» вращения. На его инерционных свойствах условия невесомости не сказываются.

Микроопыт

Двигаясь по инерции, яблоко окажется перерезанным и распадется на две половинки. Подобная ситуация возникает при колке дров, когда недоколотое полено переворачивают вместе с топором и ударяют обухом по какой-нибудь твердой опоре.

ОРТОЦЕНТР, СЕРЕДИНА СТОРОНЫ, ТОЧКА ПЕРЕСЕЧЕНИЯ КАСАТЕЛЬНЫХ И ... ЕЩЕ ОДНА ТОЧКА!

Указания к утверждениям

1. Пусть H' симметрична ортоцентру H относительно M . Тогда $AH'BH'$ – параллелограмм, откуда $AH' \parallel BH$ и $AH' \perp AC$.
2. Точка пересечения двух из трех прямых, содержащих общие хорды, имеет равные *степени* относительно всех трех окружностей.
3. Из того что четырехугольник ABA_1B_1 вписанный, получаем $\angle CB_1A_1 = \angle B$. Но угол между AC и касательной к ω , проведенной в точке C , также равен $\angle B$.
4. Из предыдущего, $\angle A_1B_1B = 90^\circ - \angle B$. Аналогично, $\angle C_1B_1B = 90^\circ - \angle B$.
5. Пусть гомотетия с центром O переводит некоторый треугольник KLM в треугольник $K'L'M'$. Тогда, скажем, ортоцентр треугольника KLM эта гомотетия переводит в ортоцентр треугольника $K'L'M'$.
6. Треугольник $H_aH_bH_c$ может быть получен из треугольника $A_1B_1C_1$ гомотетией с центром H и коэффициентом 2. Легко видеть, что $\angle AH_cB = \angle AHB = 180^\circ - \angle C$, откуда следует, что H_c лежит на окружности (ABC) .
7. Вычислительное доказательство (есть и другие, более геометрические) можно получить следующим образом. Применяя теорему синусов к треугольникам ACM, BCM, ACZ, BCZ и используя равенства $\sin \angle CAZ = \sin \angle B$, $\sin \angle CBZ = \sin \angle A$, можно прийти к равенству

$$\sin \angle ACM : \sin \angle BCM = \sin \angle BCZ : \sin \angle ACZ .$$

Указания к упражнениям

1. а) Пусть T – точка пересечения серединного перпендикуляра OM к отрезку AB с прямой BC . Тогда M и A_1 лежат на окружности с диаметром AT , значит, $T = L_1$.
- б) Пусть для определенности $\angle A < \angle B$. Имеем

$$\begin{aligned} \angle L_1ML_2 &= \angle L_1AL_2 = \angle L_1AB - \angle L_2AB = \\ &= \angle L_1BA - \angle L_2AB = \angle B - \angle A . \end{aligned}$$

С другой стороны, $MO_1 \parallel OC$, поэтому $\angle L_1MO_1 = \angle L_1OC$. Но $\angle L_1OC$ – угол между OM и OC и, как нетрудно установить, он равен $\angle B - \angle A$.

в) Так как M и A_1 лежат на окружности с диаметром AL_1 , то $L_1L_2 \perp AL_2$, поэтому L_2 лежит на окружности с диаметром K_1L_1 . Аналогично для K_2 .

- г) L_1L_2 , K_1K_2 , PM содержат общие хорды окружностей (AMA_1) , (BMB_1) и $(L_1L_2K_1K_2)$.
2. H – ортоцентр треугольника SMC .
3. $\angle XAC = \angle B$ и $\angle MA_1B = \angle B$, откуда несложно получить $\angle XAM + \angle XA_1M = \angle B_1AM + \angle B_1A_1B = 180^\circ$.
4. Треугольники XYZ и $B_1A_1C_1$ гомотетичны, причем центр гомотетии находится на прямой A_1B_1 . Прямые ZC_1 и MH (прямая, соединяющая центры вписанных окружностей треугольников XYZ и $B_1A_1C_1$) проходят через центр гомотетии.

XXXV ТУРНИР ГОРОДОВ

Задачи осеннего тура

Базовый вариант

8–9 классы

1. Один.
Самый сильный обязательно станет призером. Покажем, что может быть ровно один призер. Пронумеруем борцов по возрастанию силы от 1 до 100. В первом туре проведем поединки $1 - 2$, $3 - 4$, ..., $99 - 100$, во втором – поединки $100 - 1$, $2 - 3$, ..., $98 - 99$. Тогда каждый, кроме самого сильного, в одном из туров проигрывает.
2. Найдется.
Таково, например, число 1397245680. В самом деле, если не вычеркнута хотя бы одна из последних шести цифр, то оставшееся четырехзначное число четно или делится на 5, а если все они вычеркнуты, то осталось число 1397, кратное 11. Другой пример: 1379245680, поскольку 1379 кратно 7.
3. Заметим, что $(n, n+k) = (n, k) \leq k$, т. е. $(n, n+1) \leq 1$, $(n, n+2) \leq 2$, ..., $(n, n+35) \leq 35$. Поэтому неравенства из условия задачи могут выполняться тогда и только тогда, когда $(n, n+1) = 1$, $(n, n+2) = 2$, ..., $(n, n+35) = 35$. Но тогда $(n, n+4) = 4$, $(n, n+9) = 9$, т. е. n делится на $4 \cdot 9 = 36$, откуда $(n, n+36) = 36 > 35 = (n, n+35)$.
4. Построим параллелограмм $BCLM$. Треугольники AKL и BMK равны, поскольку $BM = LC = AK$, $BK = AL$, $\angle KBL = \angle A$ (как накрест лежащие). Значит, в треугольнике LKM выполнено $KL = KM$, а $\angle LKM = \angle BKM + \angle LKB = \angle ALK + \angle LKB = 60^\circ$.
- Следовательно, этот треугольник – равносторонний, и $KL = ML = BC$.

10–11 классы

2. Поскольку треугольники XBC и ZAC подобны, $CX : CZ = CB : CA$. Кроме того, $\angle X CZ = \angle B CA - \angle B CX + \angle A CZ = \angle B CA$.
- Поэтому треугольник XCZ подобен треугольнику $B CA$, откуда $CX : XZ = CB : BA$. А из подобия треугольников XBC и YBA следует, что $CX : YA = CB : BA$. Таким образом, $CX : YA = CB : BA = CX : XZ$, откуда $YA = XZ$. Аналогично доказывается, что $YX = AZ$. Итак, у четырехугольника $YXZA$ противоположные стороны попарно равны, т. е. он – параллелограмм.
- Строго говоря, надо еще доказать параллельность противоположных сторон, так как это мог быть самопересекающийся четырехугольник. Параллельность YX и AZ следует, например, из того, что YX получается из AC поворотом на угол XBC вокруг точки B (пусть это поворот против часовой стрелки) и гомотетией, а угол между AC и AZ (тоже тогда считая против часовой стрелки) равен углу XBC .
3. Заметим, что $(n, n+k) = \frac{n(n+k)}{[n, n+k]} < \frac{n(n+k)}{[n, n+k+1]} < \frac{n(n+k+1)}{[n, n+k+1]} = (n, n+k+1)$

при $1 \leq k \leq 34$. Поэтому, согласно задаче 3 для 8–9 классов, $(n, n+35) = 35$, $(n, n+36) = 36$. Следовательно, $[n, n+35] = \frac{n(n+35)}{35} = \frac{n^2}{35} + n > \frac{n^2}{36} + n = \frac{n(n+36)}{36} = [n, n+36]$.

5. Может.
Рассмотрим куб и сферу, касающуюся всех его ребер. Пересечением ее с поверхностью куба будет объединение шести окружностей, вписанных в грани куба. По такой фигуре можно от каждой ее точки добраться до любой другой, в том числе из точки в диаметрально противоположную точку. Если аппарат пройдет по такой траектории, невозможно будет определить, имеет астероид форму шара или форму куба.

Сложный вариант

8–9 классы

1. Пусть k , $ж$, $з$ – длины самых коротких палочек соответствующего цвета, а K , $Ж$, $З$ – самых длинных. По условию $k + ж > з$, $ж + з > K$, $з + k > Ж$. Сложив, получим $2k + 2ж + 2з > K + Ж + З$. Следовательно, удвоенная длина самой короткой палочки какого-то цвета будет больше самой длинной палочки этого же цвета. Тем более, сумма длин каждых двух палочек этого цвета будет больше длины любой палочки этого цвета, что и требовалось.
2. *Первое решение.* Пусть Петя из первой четверки чисел n , $n+1$, $n+2$, $n+3$ составит сумму $n(n+1) + (n+2)(n+3) = 2n^2 + 6n + 6$, а Вася – $n(n+3) + (n+1)(n+2) = 2n^2 + 6n + 2$.

Тогда на первой четверке чисел Петя наберет сумму на 4 больше, чем Вася. Со второй четверкой чисел они поступят наоборот, сравнив общую сумму. Затем добавят к ней произведение оставшихся двух чисел и получат одинаковые результаты.

Второе решение. Пусть из первых шести чисел Петя составит сумму $n(n+5) + (n+1)(n+3) + (n+2)(n+4)$, а Вася – сумму $n(n+4) + (n+1)(n+5) + (n+2)(n+3)$. Обе эти суммы равны $3n^2 + 15n + 11$. Оставшиеся числа можно одинаково разбить на пары.

3. Продлим отрезок BN до пересечения с прямой AC в точке K (рис.10). В треугольнике BCK высота CN является и биссектрисой, поэтому $KN = NB$. Углы BCL и CBK равны 45° , т. е. биссектриса CL параллельна BK . Значит, в треугольнике ABK медиана AN делит пополам и CL .

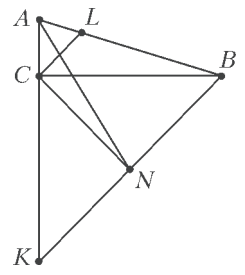


Рис. 10

4. За два вопроса.
Чтобы определить цвет точки за один вопрос, нужна ломаная, по отношению к которой все квадратики одного цвета лежат внутри, а другого – снаружи. Но тогда она содержит все отрезки, разделяющие соседние квадратики, а значит, самопересекается.

Покажем, как отгадать цвет точки за два вопроса. Построим ломаную, внутрь которой попадут все нечетные горизонтальные квадрата и только они (рис.11). Тогда первым вопросом мы узнаем четность горизонтали, содержащей загаданную точку. Аналогичным вторым вопросом узнаем четность содержащей ее

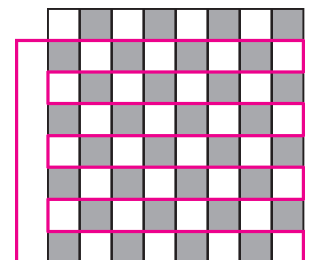


Рис. 11

вертикали. Осталось заметить, что цвет квадратика определяется четностью суммы его «координат».

Замечание. Можно ограничиться ломаными, не выходящими за пределы Петиного квадрата – попробуйте придумать пример.

6. Добавим к нашей сумме S сумму $2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n}\right)$ и вычтем равную сумму $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$. Тогда

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}.$$

Если $3n + 1$ – простое, то n четно, и мы можем сгруппировать слагаемые парами: первое с последним, второе с предпоследним и т.д. После приведения к общему знаменателю каждой пары все числители станут равными $3n + 1$. Значит, числитель суммы всех этих дробей делится на простое число $3n + 1$, а знаменатель, очевидно, не делится.

10–11 классы

2. $n = 1$ и все неотрицательные четные n .

Графики многочленов $P(x) + ax^k$ и $Q(x) + bx^l$ не имеют общих точек тогда и только тогда, когда многочлен $P(x) + ax^k - Q(x) - bx^l$ не имеет корней. Иными словами, надо у многочлена $R(x) = P(x) - Q(x)$ так изменить не больше двух коэффициентов, чтобы у получившегося многочлена не было корней.

Если $n \leq 1$, то из любого многочлена R мы можем сделать многочлен, тождественно равный 1.

Пусть $n > 1$. Если n нечетно, то нам «случайно» может достаться многочлен $R(x) = x^n + x$. Тогда, с одной стороны, надо «убить» x^n , так как многочлен нечетной степени всегда имеет корень, а с другой – добавить ненулевую константу a , чтобы не было нулевого корня. Но полученный многочлен $x + a$ имеет корень.

Если n четно, то, добавив, если надо, одночлен степени n , превратим R в многочлен четной степени с положительным старшим коэффициентом. Такой многочлен имеет наименьшее значение M . Добавив константу $1 - M$, получим положительный многочлен.

5. а) Не существуют.

Заметим, что $f(x) = f(g(g(x))) > g(x)$. Но точно так же доказывается, что $g(x) > f(x)$. Противоречие.

б) Существуют.

Достаточно задать значения функций только в целых числах: для остальных значений их можно определить произвольно.

Первый способ. Назовем четные числа «своими», а нечетные – «чужими» для функции f , а для g – все наоборот. Пусть эти функции каждое свое число x переводят в $-|x| - 2$, а чужое – в $|x| + 1$. Заметим, что каждая функция каждое число переводит в свое. Проверим два неравенства, где внутренняя функция – f . Ясно, что $|f(x)| > |x|$. Поэтому $f(f(x)) = -|f(x)| - 2 < -|x| - 2 < x$, а $g(f(x)) = |f(x)| + 1 > |x| + 1 > x$. Оставшиеся два неравенства проверяются аналогично.

Второй способ. Занумеруем все целые числа натуральными (например: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$, $x_4 = 2$, $x_5 = -2$ и т.д.). Будем строить значения $f(x_n)$, $g(x_n)$ по индукции; причем все они будут разные. Обозначим $X_n = \{x_1, \dots, x_n\}$,

$$V_n = \{f(x_1), \dots, f(x_n), g(x_1), \dots, g(x_n)\}.$$

База. $f(x_1)$ и $g(x_1)$ – произвольные различные целые числа, отличные от x_1 .

Шаг индукции. Пусть все элементы V_n уже построены. Если $x_{n+1} \notin V_n$, то в качестве $f(x_{n+1})$ и $g(x_{n+1})$ возьмем произ-

вольные различные целые числа, не входящие ни в X_{n+1} , ни в V_n .

Если же $x_{n+1} \in V_n$, то $x_{n+1} = f(x_i)$ или $x_{n+1} = g(x_i)$, где $i \leq n$. В первом случае в качестве $f(x_{n+1})$ возьмем целое число, меньшее x_i и не входящее в $X_n \cup V_n$, а в качестве $g(x_{n+1})$ – целое число, большее x_i и не входящее в $X_n \cup V_n$. Тогда $f(f(x_i)) < x_i$, $g(f(x_i)) > x_i$. Во втором случае поступим наоборот, обеспечив неравенства $g(g(x_i)) < x_i$, $f(g(x_i)) > x_i$.

В результате все значения функций будут построены и все неравенства будут выполнены.

7. Решение см. в статье А.Шаповалова, А.Лебедева «Задача о самопересекающейся ломаной» в этом номере журнала.

XVIII МЕЖДУНАРОДНАЯ АСТРОНОМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Теоретический тур

Группа α

1.1. В 23:55. 1.2. ЮВ. 2.1. Приблизительно 36 дней.

3.1. Порядка 3^m . 3.2. Орион.

4.1. Приблизительно 420000 л.с./верста² зимой;

1220000 л.с./верста² – весной и осенью;

1810000 л.с./верста² – летом.

4.2. Примерно 1–3 л.с. (опять эта лошадиная сила!).

5.1. «Нет». 5.2. «Да»; 18 октября – 17 ноября.

6.1. Примерно 200 лет. 6.2. Приблизительно 10^3 км/с.

Группа β

1.1. Примерно $7 \cdot 10^{-6}$ " (7 угловых микросекунд).

1.2. Приблизительно $4,5 \cdot 10^{-5}$ " (45 угловых микросекунд).

2.2. «Нет». 3.3. $98'$.

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**С.А.Дориченко, А.А.Егоров, Е.М.Епифанов,
А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

НОМЕР ОФОРМИЛИ

**В.Н.Власов, Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия,
М.В.Сумнина**

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

**Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ
по печати. Рег. св-во №0110473**

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №

Адрес редакции:

119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»

Тел.: (495) 930-56-48

E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано

в соответствии с предоставленными материалами

в ООО «ИПК Парето-Принт», г.Тверь

www.Pareto-print.ru

МАГНУС КАРЛСЕН – ШЕСТНАДЦАТЫЙ ЧЕМПИОН МИРА

В ноябре 2013 года в Ченнае (Индия) состоялся очередной матч на первенство мира между действующим чемпионом Виши Анандом (Индия) и претендентом Магнусом Карлсеном (Норвегия). Как и ожидалось, новым чемпионом мира, шестнадцатым по счету, стал 22-летний Магнус Карлсен, который уже два года имеет высший рейтинг на планете. В поединке планировалось сыграть 12 партий, но ему хватило и десяти, счет 6,5:3,5 в его пользу – три победы, без поражений.

Приведем две из трех побед Магнуса Карлсена с краткими комментариями.

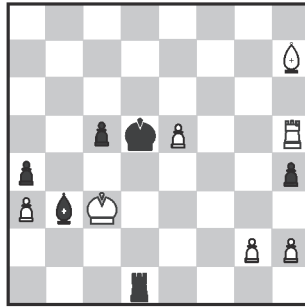
М. Карлсен – В. Ананд

5-я партия

Славянская защита

1. c4 e6 2. d4 d5 3. ♘c3 c6 4. e4 de 5. ♘:e4 ♘b4+ 6. ♘c3. Магнус избегает длинных форсированных вариантов, возникающих в случае жертвы пешки: 6. ♘d2 ♖:d4 7. ♘:b4 ♖:e4+ и т.д. 6...c5 7. a3 ♘a5 8. ♘f3 ♘f6 9. ♘e3 ♘c6 10. ♖d3. Новинка, обычно белые брали на c5. 10...cd 11. ♘:d4 ♘g4 12. 0-0-0 ♘:e3 13. fe. Конечно, не 13. ♖:e3 ♘b6, и белым придется перейти в глухую защиту. 13... ♘c7. Позволяет Магнусу перейти в лучшее окончание. 14. ♘:c6 bc 15. ♖:d8+ ♘:d8. Итак, возник эндшпиль в духе Карлсена – у него минимальный перевес, и он намерен мучить соперника хоть до ста ходов. 16. ♘e2 ♘e7 17. ♘f3 ♘d7 18. ♘e4. У черных преимущество двух слонов, но слабость на c6 и активность неприятельского коня их немного беспокоят. 18... ♘b6 19. c5 f5 20. cb fe 21. b7! Промежуточный ход, обеспечивающий белым лучшую пешечную структуру. 21... ♖ab8 22. ♘:e4 ♖:b7 23. ♖hf1 ♖b5 24. ♖f4 g5 25. ♖f3 h5 26. ♖df1 ♘e8 27. ♘c2 ♖c5 28. ♖f6 h4 29. e4 a5 30. ♘d2 ♖b5 31. b3 ♘h5 32. ♘c3 ♖c5+ 33. ♘b2 ♖d8 34. ♖f2 ♖d4 35. ♖h6! Линией «f» не удалось воспользоваться, и ладьи перестраиваются. 35... ♘d1 36. ♘b1! ♖b5 37. ♘c3 c5 38. ♖b2 e5 39. ♖g6 a4. А здесь надежнее 39...g4. Теперь Карлсен прихватывает пешку, хотя это еще не смертельно. 40. ♖:g5 ♖:b3+ 41. ♖:b3 ♘:b3 42. ♖:e5+ ♘d6 43. ♖h5 ♖d1 44. e5+ ♘d5 45. ♘h7.

45... ♖c1+? А вот это уже серьезная, если не решающая ошибка. В окончании с малым числом сил Магнус, как обычно, действует филигранно, дер-



жит соперника в напряжении, и Ананд не выдерживает. Между тем 45... ♖a1 форсированно вело к ничьей: 46. ♖g5 ♖:a3 47. ♘g8+ ♘c6 48. ♘c4 ♘:c4+ 49. ♘:c4 ♖e3 50. ♖g6+ ♘b7 51. ♘b5 a3 52. ♖g7+ ♘b8 53. ♖g8+ ♘c7 54. ♖g7+ ♘b8. Кроме повторения ходов, ничего нет. Проходная «а» обеспечивает черным ничью. Теперь же проходная «а» остается у белых, и они берут верх. 46. ♘b2 ♖g1 47. ♘g8+ ♘c6 48. ♖h6+ ♘d7 49. ♘:b3 ab 50. ♘:b3 ♖:g2 51. ♖:h4 ♘e6? Усложняло задачу белых 51... ♘c6 52. a4 ♖e2 53. ♖h6+ ♘d5. 52. a4! ♘:e5 53. a5 ♘d6 54. ♖h7! Черный король отрезан от проходной «а», и все кончено. 54... ♘d5 55. a6 c4+ 56. ♘c3 ♖a2 57. a7 ♘c5 58. h4. Черные сдались.

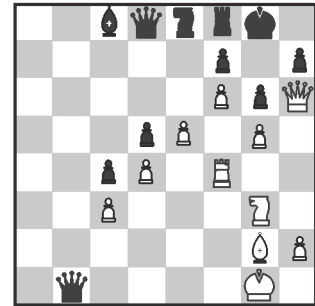
В. Ананд – М. Карлсен

9-я партия

Защита Нимцовича

1. d4 ♘f6 2. c4 e6 3. ♘c3 ♘b4 4. f3 d5 5. a3 ♘:c3+ 6. bc c5 7. cd ed. Надежнее 7... ♘:d5, но Карлсен сам играет на победу! 8. e3 c4. Закрывая ферзевый фланг, он как бы бросает вызов Ананду – у белых теперь развязаны руки в центре, что создает предпосылки для комбинационных столкновений. 9. ♘e2 ♘c6 10. g4 0-0 11. ♘g2 ♘a5 12. 0-0 ♘b3 13. ♖a2 b5 14. ♘g3 a5 15. g5 ♘e8 16. e4 ♘:c1 17. ♖:c1 ♖a6 18. e5 ♘c7 19. f4 b4. В позиционной игре и в эндшпилье Карлсен дважды переиграл Ананда, и вот теперь он вызывает чемпиона на тактическую дуэль. 20. ab. Опаснее для черных сразу 20. f5. 20...ab 21. ♖:a6 ♘:a6 22. f5 b3. Белые пешки расположились грозно, но проходная черных без всякой поддержки вот-вот проскочит в ферзи. 23. ♖f4. Энергичнее 23. h4!, пока оставляя ферзя на месте. После 23... ♘c7 24. h5 ♘e8 25. ♖f4! ♖a5 26. h6! g6 27. fg hg 28. ♘h5! ♘f5! 29. ♘h3! ♘:h3 30. ♘f6+ ♘h8 31. ♘:e8 f6!! 32. e6 ♖a2! 33. ♖f2 ♖b1+ 34. ♘h2 ♖e1! 35. ♘:f6 ♘:e6, и предсказать результат все еще невозможно. 23... ♘c7! 24. f6 g6 25. ♖h4 ♘e8! Конечно, защищать пункт g7 можно только с этого поля, на e6 конь слиш-

ком уязвим. 26. ♖h6. С намерением объявить мат неприятельскому королю, но Карлсен опять оказывается на высоте. 26...b2 27. ♖f4 b1 ♖+.



Историческая позиция. У черных лишний ферзь, но у белых страшная угроза ♖f4-h4. Однако Карлсен все рассчитал...

28. ♘f1?? Виши издалека полагал, что здесь эффектно заканчивает борьбу: 28... ♖d1 29. ♖h4 ♖h5 30. ♖:h5 gh 31. ♘e3 ♘e6 32. ♘:d5! Теперь новая угроза – 33. ♘e4, и приходится возвращать ферзя: 32... ♖:d5 (на 32... ♘:d5 решает 33. ♘f5!) 33. ♘:d5 ♘:d5. Черные фигуры полностью запатованы, и выигрывает хотя бы рейд белого короля на c5. Финал был бы симпатичный, но Виши не заметил реплики претендента на первом же ходу.

28... ♖e1! Белые сдались.

Ферзь занял соседнее поле, и белые беспомощны: после 29. ♖h4 ♖:h4 30. ♖:h4 поля f5 и h5 надежно защищены, нет ни одной угрозы, а у них не хватает «всего лишь» ладьи. Интересно, а чем бы закончилась партия после правильного 28. ♘f1? Тогда как раз следовало 28... ♖d1! 29. ♖h4 ♖h5! 30. ♘:h5 gh 31. ♖:h5 ♘f5! Черные вернули новоявленного ферзя, но подклучили слона к защите. Теперь от обеих сторон требуется точность: 33. g6! ♘:g6 34. ♖g5! ♘:f6! 35. ef ♖:f6 36. ♖:d5 ♖f3 37. ♖c5! ♖:c3 38. ♖:c4. С доски исчез почти весь боекомплект, и эта сумасшедшая партия приходила к мирному исходу.

Да, Ананд допустил редкий просмотр для матча на первенство мира. Единственный случай в истории, когда чемпион мира сдал партию без чистого ферзя. Настоящая трагикомедия, ведь по существу в этот момент Ананд распрощался с шахматной короной! Любопытно, что проигрывающий ход коня стал последним в карьере Ананда как шахматного короля (десятая партия уже была пустой формальностью). Позиция на диаграмме наверняка войдет во все сборники шахматных курьезов.

Е. Гук

Индекс 90964

Зимние причуды солнечных лучей



Разноцветной радуги зимой не увидеть, но зато можно стать свидетелем солнечных гало, столбов и даже – собак.

Прощай с физикой



(Продолжение – на с. 52 – внутри журнала)